Univ. of
Toronto
Library

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci44fran

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(PREMIÈRE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. Émile PICARD, *Président*.

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

A. GUILLET, *Secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Joseph-Bara, n° 4, Paris, VIe.

61478-20 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55

P
Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES.
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD, G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLIV. — ANNÉE 1920

(LIVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179888
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1920

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEFSCHETZ (Salomon). — Mémoire sur certains nombres invariants qui se présentent dans la théorie des multiplicités algébriques [1].

On sait que divers nombres invariants se présentent dans la théorie des multiplicités algébriques. Leur détermination effective présente souvent de grandes difficultés. C'est à la recherche des plus importants de ces nombres, dont quelques-uns sont envisagés sous un point de vue nouveau, que se rapporte le Mémoire envoyé par M. Salomon Lefschetz, professeur à l'Université de Kansas.

Un de ces nombres, désigné par ρ, s'est présenté à M. Picard dans l'étude des intégrales de différentielles totales de troisième espèce. M. Severi a ensuite indiqué une signification géométrique de ce nombre, en montrant que sur une surface algébrique on peut toujours fixer un nombre ρ de courbes algébriques, algébriquement indépendantes, telles que toute autre courbe tracée sur la surface dépende algébriquement des premières. M. Severi pose ensuite la notion de bases *minima;* le nombre de ces bases est $\rho + \sigma - 1$, σ étant un nouvel invariant. Ces nombres jouent un rôle important dans le travail de M. Lefschetz.

[1] Ce Mémoire a obtenu en 1919 le prix Bordin. L'analyse qu'on va lire constitue le rapport fait à ce sujet par M. Émile Picard (voir *Comptes rendus*, t. 169 séance du 22 décembre 1919, p. 1200-1202).

Dans une première partie, l'auteur démontre quelques propositions générales. Une d'elles concerne le nombre ρ. La surface algébrique étant considérée comme une multiplicité réelle, les courbes algébriques tracées sur elle forment des cycles à deux dimensions. Or il se trouve que le nombre de tels cycles indépendants est précisément égal à ρ. Les périodes d'une intégrale double de première espèce par rapport à ces cycles sont évidemment nulles, et l'on peut établir que, inversement, tout cycle ayant cette propriété est lié aux précédents par une homologie. Incidemment une question se pose : peut-il exister pour une surface une intégrale double de première espèce dont toutes les périodes seraient nulles? la question reste sans réponse.

M. Lefschetz développe ensuite quelques considérations sur la notion de coefficient de torsion, introduite par Poincaré, dans l'*Analysis situs*, et sur les invariants qui peuvent s'en déduire; puis il applique les résultats généraux de cette première partie à quelques cas particuliers, dont le plus intéressant est le plan double. Des circonstances très variées, relativement à σ, ρ et autres invariants, peuvent se présenter suivant la courbe de ramification.

Il a été question seulement jusqu'ici de fonctions algébriques de deux variables indépendantes. La première partie se termine par l'étude des questions analogues dans le cas d'un plus grand nombre de variables indépendantes. Il y a à considérer alors une suite d'invariants. Des recherches avaient déjà été faites dans cette voie, notamment par l'auteur lui-même. Certaines parties de la théorie se généralisent facilement; pour d'autres, le nombre des variables indépendantes, par exemple, leur parité joue un rôle. Indiquons seulement ce résultat que le théorème précis, énoncé plus haut, rattachant la recherche du nombre ρ à celle de certains cycles est remplacé seulement par une inégalité, quand le nombre des variables est supérieur à *deux*.

C'est aux variétés abéliennes que sont surtout consacrées les autres parties du Mémoire. Dans le cas de deux variables, ces variétés ont fait l'objet de nombreuses recherches, particulièrement de la part de M. Humbert dans ses beaux travaux sur les fonctions abéliennes singulières. Prenant le cas d'un nombre quelconque de variables, il y a lieu d'envisager un nombre k, représentant le

degré de singularité, très facilement lié au nombre de certaines relations arithmétiques entre les périodes. Pour deux variables, on a $\rho = 1 + k$, comme l'ont montré MM. Bagnera et de Franchise. Il semble tout d'abord que, dans le cas général, on ait seulement l'inégalité $\rho \geq 1 + k$. L'égalité subsiste cependant dans tous les cas, comme le montre M. Lefschetz, par une analyse délicate, où l'emploi d'une inégalité célèbre de Riemann dans la théorie des courbes algébriques le conduit à la relation $\rho \leq 1 + k$, d'où se tire la conclusion indiquée. Vient ensuite l'étude des différents genres numériques. Pour donner des exemples particuliers, l'auteur examine divers cas étendus de multiplication complexe, en utilisant les nombreux travaux faits sur ce sujet par Frobenius et par MM. Scorza et Rosati.

Le Mémoire se termine par l'étude des invariants des variétés de Jacobi, se rapportant à des courbes algébriques de types simples, comme le suivant :

$$y^q = \Pi(x - a_i)^{\alpha_i}.$$

Elles sont pour l'auteur une occasion d'appliquer les remarques générales qu'il a faites au début.

En résumé, M. Lefschetz montre dans ce Mémoire une connaissance approfondie des parties les plus délicates de la théorie des multiplicités algébriques, notamment en ce qui concerne l'*Analysis situs*. Dans ce domaine difficile, on doit attacher du prix à une étude aussi complète que possible de cas particuliers suffisamment étendus, étude souvent utile pour le développement ultérieur des théories générales; de plus, l'auteur fait preuve d'une grande ingéniosité dans les détails de ses analyses.

ÉMILE PICARD.

MASCART (JEAN). — LA VIE ET LES TRAVAUX DU CHEVALIER JEAN-CHARLES DE BORDA (1733-1799). Episodes de la vie scientifique au XVIIIe siècle. Avec une *Introduction* par M. ÉMILE PICARD. (*Annales de l'Université de Lyon;* nouvelle série, II. Droit, Lettres. — Fascicule 33.) 1 vol. gr. in-8, VIII-821 pages. Lyon, A. Rey; Paris, A. Picard; 1919.

Le commandant Guyou, si curieux de l'histoire de la marine française, avait plus d'une fois exprimé le regret que la vie d'un des savants qui ont rendu le plus de service à l'art nautique fût si

mal connue. Le nom du chevalier de Borda n'est certes pas ignoré. Il rappelle à beaucoup deux ou trois instruments, mais bien peu savent quelle fut la haute valeur du savant, dont l'activité prodigieuse s'est portée sur les mathématiques, l'astronomie, la physique, et qui sut appliquer de la façon la plus heureuse ses connaissances théoriques à la navigation et à la géodésie.

M. Jean Mascart a cru remplir un pieux devoir en s'efforçant de réaliser le souhait du commandant Guyou. Il a pensé aussi que, dans les circonstances actuelles, il importait plus que jamais de replacer à leur rang ceux qui ont illustré notre pays. Les notices antérieures sur Borda étaient succinctes, et bien des points restaient obscurs dans sa vie. Le savant Directeur de l'Observatoire de Lyon n'a pas reculé devant de longues recherches bibliographiques, et sa documentation présente de très sérieuses garanties. On sent qu'il s'est vivement intéressé à son sujet. Il a voulu faire connaître en Borda non seulement l'auteur, mais aussi l'homme. Et l'homme fut ici d'une qualité rare, ne séparant pas l'intérêt de la science du souci du bien public. Nous devons être reconnaissants à M. Mascart d'avoir mis en pleine lumière la noble figure du chevalier de Borda.

ÉMILE PICARD.

BIANCHI (LUIGI). — LEZIONI SULLA TEORIA DEI GRUPPI CONTINUI FINITI DI TRASFORMAZIONI (Leçons sur la théorie des groupes continus finis de transformations). 1 vol. gr. in-8, VI–590 pages. Pisa, E. Spoerri; 1918.

Ces leçons sur la théorie des groupes continus finis de transformations, destinées, dit l'auteur, aux étudiants des Universités italiennes, avaient paru, lithographiées, en 1902-1903, à peu près en même temps qu'étaient publiées en librairie celles de M. Vivanti, traduites depuis en français par M. Boulanger.

On ne peut que se féliciter de les avoir maintenant sous une forme plus accessible et avec leur rédaction définitive; car elles ne doivent pas être moins utiles aux étudiants français qu'à leurs camarades italiens. Tous les mathématiciens connaissent les beaux travaux de M. Bianchi sur les surfaces à courbure constante et sur la déformation des quadriques. Ses livres d'enseignement, et surtout ses *Leçons de Géométrie différentielle*, ont montré

quel talent de professeur s'associait en lui aux dons du géomètre. On retrouvera dans ses leçons sur la théorie de Lie les mêmes qualités didactiques, la clarté, la méthode, le soin dans tous les détails d'exposition, qui rendent la lecture facile et agréable.

Elles ne feront pas double emploi avec le Livre de M. Vivanti, conçu à un point de vue plus élémentaire, et de forme plus condensée. Elles ont un caractère plus personnel. Tout en ayant pour but, dit l'auteur, de préparer les lecteurs à l'étude de la théorie complète des groupes de Sophus Lie, telle qu'elle est développée dans les trois volumes de la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie et Engel, elles en exposent cependant, avec toute l'ampleur et la précision désirables, les parties fondamentales.

Ce n'est plus une sorte de résumé de cet Ouvrage. Sans doute, celui-ci fournit la matière de l'exposé de M. Bianchi, mais ce dernier a cherché à présenter les diverses théories sous une forme plus coordonnée ; et il n'a pas craint d'utiliser aussi les recherches de Schur et de Maurer sur les « théorèmes fondamentaux » de Sophus Lie.

Il y aurait peut-être quelques réserves à faire sur le classement des matières, adopté par M. Bianchi : il a l'inconvénient de rejeter bien loin des notions, telles que celle des groupes paramétriques, qui s'offrent d'elles-mêmes comme conséquences immédiates de la définition des groupes continus finis. Mais on ne pourra que louer dans ses leçons ce souci de netteté et d'ordonnance claire et logique. Le véritable regret à exprimer est celui que l'auteur a, lui-même, prévu dans sa Préface : c'est que la théorie des transformations de contact n'ait pas pu trouver place dans son Livre.

1. Un premier Chapitre, préliminaire, traite de la classe générale de systèmes différentiels, à laquelle appartiennent ceux qui se présentent dans la théorie des groupes continus finis.

Ce sont d'abord les systèmes de m équations linéaires aux différentielles totales entre m fonctions inconnues et n variables indépendantes, dans lesquels toutes les conditions immédiates d'intégrabilité sont identiquement satisfaites, ou, comme on dit généralement, qui sont complètement intégrables. L'auteur les appelle des *systèmes complets*, comme l'a fait, dans son Ouvrage

sur les coordonnées curvilignes, M. Darboux, à qui il emprunte la démonstration du théorème d'existence de la solution générale de tels systèmes. Il expose ensuite la théorie classique des systèmes complets d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles du premier ordre, et montre comment à tout système complet de l'une de ces deux espèces est associé un système complet de l'autre espèce.

La discussion du nombre des paramètres essentiels dans un système de fonctions le conduit ensuite, d'une manière élégante, à la détermination précise de la nature du système différentiel que l'on obtient par l'élimination de ces constantes, et dont les fonctions données constituent la solution générale. On arrive enfin ainsi à l'étude de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles, que M. Bianchi appelle *systèmes de Mayer-Lie*, et qui sont les systèmes différentiels les plus généraux dont la solution ne dépende que de constantes arbitraires.

2. Un groupe continu fini de transformations, changeant les points $(x_1, \ldots, x_n)$ en points $(x'_1, \ldots, x'_n)$, est, dans le cas le plus simple, constitué par une famille de transformations, dont les équations générales

$$(1) \qquad x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n : a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dépendent d'un certain nombre r de paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Ces paramètres étant supposés essentiels, des équations de cette forme représentent, réciproquement, ∞^r transformations, qui constitueront un groupe, dit groupe à r paramètres, ou groupe G_r, si les fonctions f_i satisfont aux relations fonctionnelles qui expriment que le produit de deux quelconques de ces ∞^r transformations est encore une de ces ∞^r transformations.

L'idée essentielle de la théorie de Lie, qui fait l'objet des leçons de M. Bianchi, consiste à considérer tout groupe G_r comme constitué en fait, non pas, comme il résulte de sa définition, par ses transformations finies (1), mais par ses sous-groupes à un paramètre; ou, ce qui revient au même, comme engendré par ses transformations infinitésimales. Par là, tous les problèmes relatifs aux groupes continus finis deviennent susceptibles de solutions d'une remarquable simplicité.

Une transformation infinitésimale est de la forme

$$x'_i = x_i + \delta x_i, \qquad \delta x_i = \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\,\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et se représente par le symbole

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

au moyen duquel s'exprime la variation correspondante $Xf.\delta t$ d'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ quelconque. Le groupe G_1 qu'elle engendre est celui dont on obtient les équations finies en intégrant les équations

$$(2) \qquad dx'_i = \xi_i(x'_1, \ldots, x'_n)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les conditions initiales $x'_i = x_i$, pour $t = 0$.

Les Chapitres II et III du Livre de M. Bianchi sont consacrés à ce passage des transformations finies d'un groupe G_r à ses transformations infinitésimales, et à la reconstitution du groupe au moyen de ces dernières. L'auteur a su y condenser, sans nuire à la clarté de son exposition, ce que contiennent d'essentiel sur ces principes de la théorie des groupes, non seulement le premier tome de l'Ouvrage de Lie et Engel, et la partie du troisième tome où sont développées les raisons intuitives des théorèmes fondamentaux, mais aussi les recherches de Schur et de Maurer sur ces théorèmes (¹).

Au Chapitre I sont établies les équations aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_{s=1}^{r} \xi_{si}(x'_1, \ldots, x'_n)\psi_{sk}(a_1, \ldots, a_r)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, r),$$

auxquelles satisfont les fonctions (1). Ce système complet, qui fournit le faisceau linéaire des transformations infinitésimales du

(¹) Comme l'a fait Lie, M. Bianchi se borne au cas où les fonctions (1) sont analytiques, et les variables sont supposées ne varier que dans des domaines d'holomorphie de ces fonctions.

groupe

$$(4) \qquad Xf = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s X_s f, \qquad X_s f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{si}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

contient en germe toute la théorie.

Dans le cas $r = 1$, il se réduit facilement à la forme (2); et les propriétés des groupes à un paramètre, contenant la transformation identique $x'_i = x_i$, en découlent.

L'étude de la réciproque, c'est-à-dire des propriétés d'une famille de ∞^r transformations (1) qui satisfont à un système différentiel de la forme (3), occupe le reste du Chapitre.

Les conclusions se simplifient si l'on introduit l'hypothèse que cette famille contient la transformation identique pour des valeurs de $a_1, \ldots, a_r$ qui n'annulent pas le déterminant des fonctions $\psi_{sk}(a_1, \ldots, a_r)$. Elle constitue alors un groupe à transformations deux à deux inverses qui font partie de l'ensemble des groupes à un paramètre engendrés par les transformations infinitésimales (4). C'est là le *premier théorème fondamental*, suivant la terminologie de Lie.

Il fait l'objet du Chapitre III, avec les deux autres théorèmes fondamentaux. On se bornera dorénavant aux groupes G_r formés de couples de transformations inverses deux à deux, c'est-à-dire engendrés par un faisceau linéaire de ∞^r transformations infinitésimales.

Rappelons que le *second théorème fondamental*, ou *théorème principal*, énonce que la condition nécessaire et suffisante pour que les transformations infinitésimales (4) engendrent un groupe G_r est que les transformations de base $X_1 f, \ldots, X_r f$ satisfassent à des identités de la forme

$$(5) \qquad (X_i f, X_k f) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les premiers membres sont des parenthèses de Poisson (ou crochets de Jacobi).

Quant au *troisième théorème fondamental*, il exprime les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir r^3 constantes c_{iks} pour se trouver ainsi associées à un groupe G_r, opérant sur un nombre de variables $x_1, \ldots, x_n$ convenablement choisi.

Le Chapitre III contient encore le mode de construction des *groupes mixtes* [1], c'est-à-dire constitués par plusieurs familles de transformations de la forme (1), au moyen de groupes G_r engendrés par des transformations infinitésimales, et d'un nombre convenable de transformations particulières, convenablement choisies.

Le Chapitre IV achève cette première Partie de l'Ouvrage, consacrée aux divers modes de définition des groupes G_r. Il traite des *équations de définition*, c'est-à-dire des systèmes de Mayer-Lie qui définissent, quand on les considère comme fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, soit les composantes

$$\xi_i = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s \xi_{si}(x_1, \ldots, x_n) \tag{6}$$

des transformations infinitésimales (4) du groupe (équations de définition des transformations infinitésimales); soit les fonctions (1) qui en définissent les transformations finies (équations de définition des transformations finies). Les unes et les autres s'obtiennent par l'élimination de constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ pour les premières, $a_1, \ldots, a_r$ pour les secondes. Les premières sont les équations aux variations des secondes.

L'auteur indique comment ce mode de définition a été étendu par Lie aux groupes continus infinis, dont la transformation générale dépend de fonctions arbitraires : tel le groupe des transformations conformes du plan.

Revenant aux groupes finis, il étudie, encore, d'après Lie, la notion d'*ordre* infinitésimal d'une transformation infinitésimale, en un point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, et, en particulier, le sous-groupe de celles qui sont d'ordre non nul, et auquel il donne le nom de *groupe de stabilité* du point, parce qu'il est composé de toutes les transformations du groupe G_r qui laissent ce point en repos.

Ce point de vue revient à considérer les transformations infinitésimales comme définies par des séries de Taylor, dont les premiers termes pourront toujours être calculés au moyen des équations de définition.

---

[1] Tel est le groupe, composé de tous les mouvements et symétries dans le plan, qui est le groupe fondamental de la Géométrie plane élémentaire.

3. Les Chapitres V à X traitent des diverses propriétés des groupes et des théories qui s'y rattachent; nous nous bornerons à en indiquer un sommaire rapide.

Chapitre V. — Invariants, et variétés invariantes; transitivité, primitivité, systaticité.

Chapitre VI. — Composition des groupes; groupes abéliens; sous-groupes invariants; indices de composition; groupes dérivés; groupes intégrables.

Chapitre VII. — Groupe adjoint: forme canonique des équations d'un groupe et de son groupe adjoint; recherche des sous-groupes. Équation caractéristique. Composition et structure d'un groupe; genre (rang); groupes de genre zéro.

Chapitre VIII. — Similitude des groupes. Groupes simplement transitifs réciproques. Modes d'imprimitivité d'un groupe simplement transitif.

Chapitre IX. — Isomorphisme défini au moyen des transformations infinitésimales. Groupe complémentaire par rapport à un sous-groupe invariant; séries de composition et groupes facteurs. Groupes paramétriques. Isomorphisme défini au moyen des transformations finies. Complément à l'étude de la similitude. Groupe formé de toutes les transformations permutables à un groupe donné.

Chapitre X. — Extension et prolongement des transformations, des transformations infinitésimales et des groupes. Définition et calcul des invariants différentiels. Cas des groupes à deux variables. Exemples.

4. Parmi les nombreux problèmes qui se rattachent à des classes particulières de groupes, M. Bianchi a choisi, comme offrant un intérêt particulier, celui de la détermination effective des *types* de groupes à un nombre déterminé n de variables. On sait que Lie a traité complètement le cas de $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$. Dans son onzième Chapitre, M. Bianchi expose les résultats obtenus par Lie dans les deux premiers cas, c'est-à-dire la classification des types de groupes de la droite et du plan, en laissant seulement de

côté la discussion de la réductibilité des types de groupes imprimitifs obtenus les uns aux autres.

5. L'Ouvrage se termine par deux applications de la théorie des groupes continus finis. La première concerne les problèmes d'intégration des équations différentielles qui ont été pour Lie l'origine de ses recherches sur la théorie des groupes continus, et dont l'étude, poursuivie sous l'inspiration des idées de Galois, l'a conduit à développer les diverses parties de cette théorie. M. Bianchi y consacre son douzième Chapitre, inspiré par les *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* de Lie et Scheffers. Il contient l'intégration des équations $f(x, y, y') = 0$, qui admettent une transformation infinitésimale

$$Xf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

connue, et les principes de la théorie de l'intégration d'une équation

$$Af \equiv \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

admettant des transformations infinitésimales connues, que Lie a publiée dans le Tome 25 des *Mathematische Annalen*. M. Bianchi expose la réduction du problème au cas où ces transformations engendrent des groupes simples, il traite du cas où le groupe est intégrable, et de l'application de la théorie aux équations du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ qui admettent un groupe en x, y.

6. Enfin, le treizième et dernier Chapitre est consacré à l'étude d'une question qui se rattache au problème de la discussion des principes fondamentaux de la Géométrie, tel que l'a posé Riemann dans sa célèbre thèse inaugurale. Il s'agit de déterminer les espaces qui admettent un groupe continu de mouvements, c'est-à-dire les formes quadratiques, définies et positives,

$$ds^2 = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui admettent un groupe continu de transformations. L'auteur renvoie à ses *Leçons de Géométrie différentielle* pour le cas des ds^2

à courbure constante, c'est-à-dire le cas où le groupe a le nombre maximum, soit $\frac{n(n+1)}{2}$, de paramètres : ce sont les autres cas qu'il a spécialement en vue, et qu'il étudiera comme application de la théorie des groupes continus.

Le point de départ est le système des équations de définition des transformations infinitésimales qui laissent invariant un ds^2 donné; elles ont été données d'abord par Killing. Elles permettent d'abord d'obtenir un certain nombre de résultats généraux sur la nature des groupes à n variables qui peuvent être groupes de mouvements pour un ds^2 convenablement choisi : tels sont les groupes projectifs de la métrique cayleyenne, dans le cas des espaces à courbure constante.

Après l'exposé de ces généralités et le rappel des résultats classiques pour le cas $n = 2$, M. Bianchi traite d'une manière approfondie du cas $n = 3$, où il détermine et classe tous les types de ds^2 répondant à la question.

C'est à M. Bianchi lui-même que l'on doit ces résultats : et ce Chapitre XIII de son Livre offre cet intérêt particulier d'être ainsi, pour la plus grande part, l'exposition de ses propres recherches sur cette importante question, relative à la déformation des surfaces. On peut penser que ce sont même ces recherches qui ont été l'origine des belles leçons sur la théorie des groupes continus finis que nous venons d'analyser.

E. Vessiot.

BOUTROUX (Pierre). — Les principes de l'Analyse mathématique. *Exposé historique et critique.* Tome II, 1 vol. gr. in-8, IV-512 pages. Paris, A. Hermann et fils; 1919.

Le savant, lorsqu'il cherche à étendre le domaine des connaissances scientifiques, est presque toujours, inconsciemment, un peu unilatéral. Les besoins actuels de la science, les travaux et les pressentiments de ses devanciers, le mouvement de son temps, bref, toute une ambiance de faits et d'idées, l'oblige malgré lui à s'orienter dans une voie déterminée, souvent même à adopter des procédés de recherche dont le genre est éminemment actuel et pourrait servir à caractériser son époque. Au contraire, lorsqu'il observe le

passé dans son ensemble, ne poursuivant d'autre but que d'en démêler la trame, il voit se dérouler sous ses yeux tout un monde d'idées, de méthodes, de tendances diverses. C'est de ce point de vue, hautement philosophique et général, que l'auteur de ce livre envisage l'Analyse mathématique.

La première moitié de ce Volume (Chap. IV, V et VI) est formée par la suite du deuxième Livre du Tome I. Examiner sous leurs multiples aspects, par ordre de complexité croissante (qui coïncide à très peu près avec l'ordre historique), les diverses théories *constructives* échafaudées par les mathématiciens de tous les âges, tel est le but de l'auteur dans ce deuxième Livre. Le lecteur y trouvera sur l'étude algébrique des figures, sur la géométrie analytique, sur les extensions progressives de l'Algèbre, un exposé descriptif très détaillé : l'histoire des découvertes et des tendances philosophiques y fait à tout instant pressentir le développement ultérieur de la construction algébrique ou géométrique.

Mais c'est surtout dans le troisième Livre qu'apparaît en son plein le plan de M. Boutroux (d'ailleurs très explicitement formulé) et que se montre le plus la profondeur de son étude philosophique de l'Analyse.

Pour M. Boutroux, le savant fut, dans l'ordre historique, d'abord un contemplateur : le résultat de ses recherches, seul, l'intéresse. Puis, obligé, pour découvrir des propriétés de plus en plus cachées des objets mathématiques qu'il étudie, de perfectionner sans cesse les moyens de la découverte, il finit par s'attacher davantage à l'étude de ces procédés, au point de considérer le résultat comme accessoire. Dans cette période, le savant est devenu constructeur : il bâtit pour le plaisir de bâtir et non pour habiter ensuite la construction. C'est à l'étude de ces deux premières phases que sont consacrés les deux premiers Livres de l'Ouvrage de M. Boutroux, répartis dans le Tome I et la première moitié du Tome II.

Cependant apparaît nécessairement, aux yeux du savant, le caractère artificiel du point de vue constructif. Les constructions possibles sont en nombre infini ; d'ailleurs il est également possible, dans toutes les directions, de perfectionner les procédés employés et de ne s'attacher qu'à leur élégance ou à leur subtilité. Pour choisir entre cette multitude d'orientations également tentantes, il faut donc s'attacher à autre chose qu'au mécanisme des cons-

tructions : force est de revenir en arrière, de disséquer les résultats obtenus, d'en chercher le contenu, la raison d'être, et même les fondements logiques. « Après avoir été pendant quatre siècles — du moins après avoir été *surtout* —, dit M. Boutroux, un constructeur, un généralisateur, le savant apparaît maintenant comme un analyste ou scrutateur. C'est une vigie qui cherche à s'orienter dans un océan inconnu, et qui analyse ce qu'elle voit. »

C'est donc, en quelque sorte, à une analyse des méthodes analytiques elles-mêmes, que se livre l'auteur dans cet important *Troisième Livre* de son Ouvrage. Parmi les plus notables résultats de la nouvelle orientation analytique de l'esprit mathématique, il faut citer en premier lieu l'Analyse infinitésimale, quoique, comme le fait remarquer M. Boutroux, son origine soit antérieure au revirement général des esprits qui provoque la tendance analytique.

L'étude des infiniment petits, des limites, et des conséquences de ces notions trouve donc dans ce livre une place importante, étude toujours accompagnée, selon le point de vue de l'auteur, de l'exposé historique des découvertes et des questions philosophiques qu'elles posent ou résolvent.

L'analyste y apparaît avec une physionomie particulière et plus large que celle du contemplateur ou du constructeur purs. De ce que l'analyste dissèque méthodes et résultats, il n'en résulte pas qu'il scrute les faits au hasard et sans méthode : il n'analyse pas pour le plaisir d'analyser, mais pour savoir; le constructeur, au contraire, construisait pour le seul plaisir de construire.

M. Boutroux ne se borne pas à exposer *in abstracto* les procédés et le but de la méthode analytique. Pour nous montrer comment on dissèque, il fait lui-même, sous nos yeux, cette dissection des êtres et des théories obtenus par le constructeur. Sur bien des points (analyse des notions de groupe, d'ensemble, analyse des *principes*, du concept de continuité, des notions d'intégrabilité et de sommabilité), M. Boutroux conduit sans effort son lecteur jusqu'aux limites actuelles de la *méthode* analytique en Mathématiques.

En un Chapitre important, l'auteur étudie les analyses modernes des fondements de la Géométrie; le caractère de la méthode axiomatique d'Hilbert y apparaît comme un peu artificiel et mystérieux précisément sur le point le plus important, à savoir sur les procédés

qui permettent d'obtenir un ensemble d'axiômes qui soit complet et cohérent.

L'Analyse de la notion de correspondance, et de celle de *fonction* qui en découle, ainsi que de ses multiples conséquences, terminent cet Ouvrage auquel M. Boutroux a su donner une originalité d'exposition et une profondeur philosophique indéniables. Ce Livre remarquable, et d'une lecture si attachante, fournira sur maint sujet des documents historiques et philosophiques de premier ordre; un index historique, qui termine le Volume, rendra plus commode à l'étudiant l'intelligence des faits historiques.

Souhaitons que cette publication reçoive du public mathématique l'accueil empressé qu'elle mérite en soi.

De cette œuvre originale se dégagent le caractère des recherches des savants contemporains et un éloge de la Science mathématique moderne. M. Pierre Boutroux s'est plu, d'ailleurs, à faire, de ce caractère et de cet éloge, la conclusion de son Livre. Voici, en effet, comment il s'exprime dans son dernier paragraphe :

« Tâche ardue, certes, hérissée d'obstacles, féconde en belles surprises aussi.

» J'emploie ces derniers mots à dessein, car ils caractérisent bien l'attitude des savants contemporains à l'égard de leurs études, attitude qui rappelle à s'y méprendre celle du philosophe spéculateur de l'antiquité, partant en voyage d'exploration pour découvrir le monde des idées. Le rapprochement s'impose à notre esprit et il va nous aider à dégager la conclusion à laquelle conduit l'examen des théories qui servent de base aux mathématiques modernes.

» Après une lente et complexe évolution, il semble que la Science se retourne maintenant vers son idéal primitif, il semble que l'âme du mathématicien redevienne hellène.

» C'est que la superbe illusion, sur laquelle, pendant deux siècles, l'Algèbre a vécu et grandi, se dissipe aujourd'hui. Transporté par les premières manifestations de la puissance synthétique, l'homme a déclaré : « La science est mon œuvre, c'est une *construction* » dont je suis l'architecte ; rien n'est plus faux que l'attitude passive » du géomètre grec, de ce rêveur qui se borne à enregistrer des faits » et à pêcher à la ligne de jolis théorèmes. » Et voici qu'aujourd'hui

les limites de notre puissance de synthèse apparaissent aux moins clairvoyants. Au-dessus de l'édifice de la Science, il y a quelque chose, qui n'est pas notre fait. Il y a un monde d'idées (comme, par exemple, l'ensemble des idées se rattachant à la notion de fonction, infiniment plus riche que toutes nos constructions), — un monde d'idées que nous nous efforçons de pénétrer sans espoir d'y réussir jamais complètement, et dont, par des procédés de projection, aussi peu déformants que possible, nous devons essayer de dresser la carte.

» Ce sont les Grecs qui avaient raison. La recherche scientifique est une contemplation de l'esprit; mais c'est, quoi qu'en ait dit Platon, une contemplation qui suppose une industrie préalable. — Nous avons dépassé les Grecs le jour où nous avons reconnu que, pour voir loin et profondément, il est nécessaire de s'aider d'instruments, de travaux d'art et d'échafaudages. »

P. Drouin.

INFORMATION.

Nous apprenons que la maison d'édition Gauthier-Villars et Cie vient d'ouvrir un magasin de vente, 107, boulevard Saint-Germain (6e). On y trouvera, en dépôt permanent, les plus importantes publications scientifiques et techniques du monde entier. On pourra s'y documenter rapidement sur tout ouvrage ou périodique de sciences pures ou appliquées. C'est là une initiative intéressante qu'il convient de signaler : elle marque la création d'un organisme documentaire qui manquait à la librairie française.

La R.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VESSIOT (E.). — Leçons de Géométrie supérieure, professées à l'Université de Lyon, et rédigées par M. Anzemberger. Avec une *Préface* de M. Koenigs. Édition revue et augmentée. 1 vol. in-8, x-376 pages. Paris, J. Hermann, 1919.

Pour présenter au public la première édition, aujourd'hui épuisée, de son livre, M. Vessiot n'a eu besoin de personne. Cette première édition a suffi pour asseoir la réputation de l'ouvrage, et la seconde, en raison des améliorations introduites, ne fera que l'assurer encore davantage.

Malgré qu'il ne s'agisse pas ici d'une présentation en forme au public, présentation notoirement inutile, je n'ai pas cru devoir décliner l'offre aimable qu'a bien voulu me faire mon savant collègue et ami, d'écrire ces quelques lignes en tête de son livre. En même temps qu'un témoignage de profonde estime pour le savoir et le talent d'exposition de l'auteur, j'y ai vu l'occasion de mettre en relief le caractère spécial qu'ont revêtu les travaux géométriques dans ces dernières années, et de faire sentir la nécessité qu'il y a de diffuser un livre comme celui-ci, qui ouvre l'accès du progrès aux élèves studieux, malheureusement trop rares, que leur goût entraîne vers la Géométrie.

Dans la première partie du dernier siècle, que l'on peut approximativement limiter à l'année 1870, la géométrie a réalisé par les voies les plus diverses et sur les terrains les plus variés d'inestimables conquêtes. Cette période héroïque a vu naître les notions les plus essentielles ; elle les a vues aussi se développer et aboutir à de grands problèmes dont la solution, demandée à l'Analyse, a provoqué, dans cette science sœur, un mouvement profond qui s'amplifie chaque jour. Il suffit de citer les grands noms de Monge, de Dupin, de Gauss, de Serret, de Lamé, d'Ossian-Bonnet, de Bour, pour évoquer les larges voies ouvertes dans la théorie des surfaces et dans celle des coordonnées curvilignes. Ceux de Poncelet et de

Chasles rappellent les premières évocations des grandes lois de correspondance et des transformations qui devaient, un peu plus tard, trouver dans l'œuvre de Sophus Lie une si magnifique inflorescence. Vers la fin de la même période, comme couronnement du principe de dualité, entre la géométrie du point et celle du plan, Pluecker plaçait la géométrie de la droite et introduisait d'une façon systématique dans la science les notions de congruence et de complexe sur lesquelles, il faut cependant le reconnaître, longtemps auparavant, Malus, Dupin et Transon avaient, à propos d'optique, produit d'intéressantes considérations et d'importants résultats. Chasles, vers la même époque, avait montré comment la cinématique du corps solide met en œuvre le principe de dualité et, concurremment avec Pluecker, il avait mis la main sur ce que ce dernier appela un complexe linéaire.

Ainsi se sont accumulés, durant cette illustre période, des matériaux de la plus grande valeur dans les ordres les plus divers. Ces grandes idées, nées à l'écart les unes des autres, et dont les initiateurs s'ignoraient souvent entre eux, paraissaient destinées à faire isolément leur chemin et à constituer autant de catégories de spécialisations pour les futurs géomètres.

Il appartenait à la dernière partie du XIXe siècle de démentir ces apparences et d'opérer la merveilleuse fusion de tous ces éléments.

Les grands auteurs en auront été, par des moyens différents, Sophus Lie et Darboux. Il serait injuste d'oublier Ribaucour, qui a contribué puissamment de son côté à réaliser cette pénétration si féconde des diverses branches de la Géométrie les unes dans les autres et qui, sur des exemples inoubliables, a introduit la méthode cinématique en géométrie.

On ne peut plus aujourd'hui s'occuper des surfaces sans faire intervenir les systèmes conjugués, ni des systèmes conjugués sans faire intervenir quelque congruence de droites, soit que celle-ci découpe le réseau conjugé sur la surface, soit qu'elle soit formée par les tangentes à l'une des lignes du réseau. Les réseaux conjugués sont, d'autre part, en dépendance avec les équations autrefois envisagées par Laplace, et il se trouve que les transformations que l'on connaissait de ces équations correspondent au passage de l'une à l'autre des surfaces focales de la congruence.

La représentation sphérique d'une surface, qui apparaissait comme un artifice génial de Gauss pour étendre aux surfaces la notion de courbure, en analogie avec les courbes, s'est trouvée rentrer dans les idées de dualité de Chasles qui conduisent à définir une surface par ses plans tangents. Il suffisait, comme Darboux l'a montré, d'introduire la distance d'un point fixe au plan tangent à côté des cosinus directeurs de la normale que Gauss avait considérés pour définir la représentation sphérique de la surface.

Le problème ardu de la déformation des surfaces restera un exemple éternellement frappant de rapprochements imprévus et féconds. Si, comme Bour avait pu le croire un instant, on avait réussi l'intégration de l'équation aux dérivées partielles dont dépend analytiquement le problème, celui-ci eût, sans doute, beaucoup perdu de son intérêt aux yeux de nombre de mathématiciens trop enclins à n'apprécier en ces questions que le côté analytique. Or le problème est resté entier à cet égard. Cela n'a empêché ni Ribaucour et Darboux de mettre au jour leurs systèmes cycliques, ni Darboux et toute une pléiade de géomètres de découvrir les singulières circonstances qui accompagnent la déformation des quadriques.

Nous ne saurions multiplier ici les exemples analogues qui abondent en Géométrie transcendante. Les quelques-uns que nous venons de donner suffisent pour faire comprendre que, de nos jours, les immortels travaux des anciens géomètres du siècle dernier ne doivent plus nous apparaître comme des monuments isolés, mais bien plutôt comme les superbes arceaux d'un unique et grandiose édifice dont toutes les parties sont solidaires et où il n'est plus permis au géomètre de se cantonner en un coin. Les questions sont aujourd'hui tellement liées entre elles, qu'un chercheur, qui poursuit un problème pris sur un terrain déterminé, ne peut se flatter d'y conserver le même horizon ; car il arrive souvent que la claire solution et le plein épanouissement du problème s'opèrent sur un terrain très différent de celui d'où l'on est parti.

Il est toujours maladroit de prétendre isoler une question que l'on étudie, et voilà pourquoi on ne peut conseiller de l'aborder de but en blanc par l'analyse. Une question de structure se trouve à chaque instant posée, qui ne se confond pas plus avec le calcul que le projet de l'architecte avec les moellons et la chaux qu'em-

pilent ses ouvriers. Dans toute question de structure géométrique, rien ne peut suppléer à une connaissance profonde de la matière géométrique elle-même, à l'application d'une opiniâtre réflexion, enfin à l'exercice spontané de l'intuition. Ce n'est pas que souvent le résultat obtenu ne revête une forme simple que le calcul après coup retrouvera sans effort. Mais vraiment le difficile est d'abord d'y penser.

Cette existence propre et indépendante de l'esprit géométrique a donné lieu de tous temps à des divergences d'appréciations dont il serait sans doute prématuré de prédire la fin. Les *Éloges académiques*, de Joseph Bertrand, en évoquent quelques épisodes illustres dans le passé. L'un des plus frappants est la froideur avec laquelle Cauchy accueillit, en son temps, l'apparition du célèbre *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet. Plus tard, la résistance se manifesta par le peu de faveur accordée aux découvertes de Chasles, aujourd'hui immortelles. Il fallut les Mémoires, si remarquables d'ailleurs, sur l'attraction des ellipsoïdes pour effacer certaines préventions.

A l'appui de la thèse générale, il ne sera pas déplacé de citer ici quelques lignes de l'*Éloge* de Poncelet, par Joseph Bertrand.

« Descartes, dit Bertrand, avait cru, par des procédés uniformes de calcul, abolir le droit d'inventer avec génie en Géométrie. Croyant avoir tout préparé et tout prévu, en laissant sur plus d'un point à ses successeurs le plaisir d'accomplir le progrès, il en usurpait par avance tout le mérite et toute la gloire. « J'espère, disait-il, » que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que » j'ai expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement » pour leur laisser le plaisir de les inventer. »

» Ceux, poursuit Joseph Bertrand, qui, sur la foi d'un si fier génie, ont cru l'ère des découvertes originales terminée dans l'étude des courbes, cherchèrent naturellement dans d'autres parties de la Science un plus fructueux emploi de leurs efforts, et le progrès le plus grand, sans difficulté, qu'ait jamais fait cette belle théorie, a été ainsi l'occasion et le signal d'un temps d'arrêt dans sa marche.

» Descartes oubliait que, suivant la très heureuse expression d'un géomètre contemporain, la géométrie est un art aussi bien qu'une science : *Mathesis ars et scientia dicenda;* et, s'il est

quelquefois possible à une science de marquer dans une formule définitive la fin de ses efforts et le terme de ses progrès, l'art est inépuisable et infini, toujours jeune et toujours fécond pour des génies nouveaux » ([1]).

Nous sera-t-il permis d'introduire ici un autre point de vue? De nos jours, le développement intensif des théories analytiques et la grande place qu'elles tiennent dans les programmes réalisent ce résultat que c'est surtout à une gymnastique de rigoureuse et abstraite logique que sont exercées les intelligences de nos jeunes gens. Or, l'expérience déjà ancienne des examens dit trop éloquemment combien incomplète et inopérante est cette formation si elle ne trouve pas un contrepoids dans la pratique des réalités plus concrètes de la Géométrie ou de la Mécanique. Il est donc grandement à souhaiter que le goût et le culte de la Géométrie soient favorisés dans notre enseignement plus qu'ils ne le sont aujourd'hui.

Le livre de M. Vessiot est de nature à contribuer, sur le terrain le plus élevé, à la diffusion de ces bienfaisantes études où le génie français s'est si harmonieusement manifesté en élégance et en grandeur. M. Vessiot, qui est aussi un analyste averti, a su donner à son exposition cette forme impeccable dans la précision, qui facilite précieusement le maniement des notions quantitatives et des formules générales où elles interviennent.

Il a englobé dans son Livre tout ce qu'il est essentiel de connaître pour être à même de lire avec fruit les travaux originaux des inventeurs. Les amis de la Géométrie ne peuvent que se réjouir de l'aide que ce livre va apporter à leur science favorite, et doivent former les meilleurs vœux pour la continuation de son succès.

G. Koenigs.

([1]) Joseph Bertrand, *Éloges académiques*. Hachette, 1890, p. 108.

VIVANTI (GIULIO). — NUOVI ESERCIZI DI ANALISI INFINITESIMALE, TRATTI DALLE MATEMATICHE APPLICATE. [Nouveaux exercices d'Analyse infinitésimale, tirés des Mathématiques appliquées.] 1 vol. in-8, VII-520 pages, avec 54 figures. Pavia, Mattei e C., 1916.

Le *Bulletin* a déjà rendu compte des *Esercizi di Analisi infinitesimale* de M. G. Vivanti [1]; ce recueil était exclusivement consacré à des problèmes d'Analyse pure et de Géométrie. Le volume actuel, réservé aux Mathématiques appliquées, constitue le complément naturel de son devancier. Le choix des exercices qui le composent est extrêmement varié : on peut même affirmer sans crainte que toutes les sciences qui, à un titre quelconque, relèvent des Mathématiques, y sont représentées. Un coup d'œil sur la Table générale suffit pour le montrer; on y découvre aussitôt les onze subdivisions suivantes :

I. Cinématique,
II. Statique,
III. Théorie du potentiel,
IV. Dynamique,
V. Hydromécanique et hydraulique,
VI. Physique,
VII. Chimie physique et thermodynamique,
VIII. Technique,
IX. Astronomie et Géodésie,
X. Calcul des probabilités, Économie et statistique,
XI. Questions variées.

Entrer dans le détail des différents sujets abordés par l'Auteur est chose impossible, même dans une longue analyse; bornons-nous à quelques remarques. Dans l'ensemble, le niveau des Exercices est celui d'un Cours de Mathématiques générales. A juste titre, le calcul des intégrales indéfinies y tient une part importante. Peut-être pourrait-on regretter que la méthode d'intégration par les fonctions rationnelles y soit aussi largement représentée; il est pourtant si simple d'intégrer par les fonctions circulaires des expressions telles que

$$\int_{-a}^{0} x^2 \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx \qquad \text{ou} \qquad \int_{-a}^{0} x^3 \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{3}{2}} dx\,!$$

A différentes reprises, l'Auteur aborde des théories plus diffi-

(1) *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XXXVIII, 1914, 1re Partie, p. 109-110.

ciles, comme, par exemple, le problème des courbes tautochrones ou l'intégration par séries de l'équation

$$x'''' + 8t^2 x'' + 16tx' + (16t^2 + 12)x = 0.$$

Observons encore que les Exercices consacrés au frottement ont été incorporés à la « Technique »; avec raison, ils ont été disjoints des questions de Mécanique rationnelle.

Une telle variété dans le choix des Exercices aurait pu dérouter l'étudiant qui débute en Analyse; il y avait là une difficulté réelle que l'Auteur a très heureusement vaincue. La correspondance entre les problèmes et les différents Chapitres du Cours d'Analyse infinitésimale est établie à l'aide d'un ingénieux dispositif : au début de chaque question, un système de numérotage indique les parties du Cours qui sont supposées acquises; la clef du numérotage est donnée par la Table qui termine l'Ouvrage et qui fait connaître, inversement, tous les Exercices dans lesquels une même théorie analytique trouve son application. Grâce à ce procédé, l'étudiant pourra tempérer constamment les rigueurs d'un Cours abstrait par des applications aussi attrayantes que variées.

La chose lui sera d'autant plus facile qu'à la fin du Volume un Index des termes techniques lui fournit, sous une forme condensée, mais très claire, l'explication de toutes les locutions étrangères au cours d'Analyse, et figurant dans le recueil. De plus, une liste d'Ouvrages judicieusement choisis permettra à l'élève de compléter ses connaissances techniques sans perte de temps. On le voit, l'Ouvrage a été minutieusement étudié dans tous ses détails, et c'est très sincèrement que nous lui souhaitons une diffusion aussi large que possible dans nos Universités françaises.

René Garnier.

PETROVITCH (Michel). — Les Spectres numériques, avec une *Préface* de M. Émile Borel. 1 vol. gr. in-8, VII-110 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1919.

« Spectres numériques ». — De prime abord le rapprochement paraît plutôt paradoxal! Et pourtant, ce n'est pas la première fois que ce mot de spectre est employé en Mathématiques : déjà, dans

ses recherches sur les formes quadratiques à une infinité de variables, M. Hilbert avait eu recours aux dénominations de spectre ponctuel ou continu, et de forme spectrale ([1]). Mais les « spectres » de M. Petrovitch ont une signification entièrement différente : et l'on doit reconnaître que la terminologie introduite par le savant professeur à l'Université de Belgrade ne constitue pas seulement une simplification de langage : elle s'impose d'elle-même par la nature du sujet traité; et, plus d'une fois, elle éveille de troublantes analogies entre des méthodes aussi dissemblables, en apparence, que celles de la théorie des nombres et de la dispersion des rayons lumineux!

Le point de départ du travail de M. Petrovitch remonte à une proposition classique de la théorie des fonctions : la puissance de l'ensemble (E) des fonctions continues d'une variable est celle du continu; on peut donc établir une correspondance biunivoque entre les éléments de (E) et les nombres S de l'intervalle (0, 1) par exemple. Mais comment réaliser une telle correspondance? Le procédé de M. Petrovitch consiste à utiliser la représentation décimale du nombre S : ses figures décimales successives, groupées par tranches consécutives suivant une loi convenable, fourniront une suite d'entiers dont la connaissance permettra d'individualiser une fonction $f(x)$; et S sera dit le *spectre* de $f(x)$.

Afin de préciser la notion précédente, bornons-nous, comme l'Auteur lui-même, aux fonctions analytiques; une telle fonction, soit $F(x)$, est pleinement définie par l'un quelconque de ses éléments, soit

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Pour nous placer d'abord dans le cas le plus simple, supposons que chacun des coefficients a_n soit sur un entier positif inférieur à 10 : le spectre de $F(x)$ sera le nombre S dont la représentation décimale est

$$0, a_0 a_1 \ldots a_n \ldots;$$

inversement, $F(x)$ sera dite *la génératrice spectrale* de S que

([1]) *Voir* à ce sujet les Leçons de M. Frédéric Riesz sur les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (*Collection de Monographies sur la théorie des fonctions* publiées sous la direction de M. Émile Borel, Paris, Gauthier-Villars, 1913).

l'on pourra calculer par la formule $10S = F\left(\frac{1}{10}\right)$. Il est clair que la connaissance *approchée* du nombre S à 10^{n} près fournira *exactement* n coefficients de la fonction $F(x)$.

Pour étendre la représentation précédente au cas d'une fonction $f(x)$ dont les coefficients tayloriens a_k ont un nombre quelconque de chiffres, l_k, nous déterminerons un entier h_k, fonction aussi simple que possible de l'indice k, et telle que l'on ait $l_k < h_k$; soit a'_k le symbole formé par l'entier a_k précédé de $h_k - l_k$ zéros. Pour spectre de la fonction $f(x)$, nous prendrons le nombre dont la représentation décimale est

$$0, a'_0 a'_1 \ldots a'_n \ldots;$$

a'_k sera la $k^{\text{ième}}$ *tranche* du spectre; a_k, la $k^{\text{ième}}$ *cannelure* et le chiffre de rang i dans a_k sera la $i^{\text{ième}}$ *raie* de la tranche (ou de la cannelure). Les $h_k - l_k$ zéros constitueront la $k^{\text{ième}}$ *partie sombre*, et le nombre de ces zéros mesurera la *dispersion* du spectre; enfin, la loi qui exprime h_k en fonction de k sera dite le *rythme spectral*: pour $h_k = a$, ou $h_k = ak + b$ (a et b, constantes), on aura un rythme uniforme ou uniformément accéléré.

Prenons, par exemple, $a_k = C_{2k}^{k}$; nous aurons $a_k < 4^k$; nous pourrons adopter, dès lors, le rythme $a_k = k$, et nous déduirons le spectre $S = \Phi(1)$, avec

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(4x\cos^2 t)\,dt,$$

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n^2+n} x^n \qquad \text{et} \qquad q = 10^{-\frac{1}{2}}.$$

Revenons à la correspondance entre une fonction et son spectre; nous ne l'avons établie jusqu'ici que lorsque les a_n sont des entiers ordinaires, résultat qu'on peut étendre au cas où les a_n sont des entiers de Gauss. Mais on n'obtient ainsi qu'une classe très limitée de fonctions, soient $E(x)$, susceptible d'une représentation spectrale. Or imaginons que, $f(x)$ étant une fonction donnée, à coefficients tayloriens non entiers, il existe une opération fonctionnelle $\Delta[f]$ qui, appliquée à $f(x)$, la change en une fonction $E(x)$. Si S est le spectre de $E(x)$, nous pourrons convenir de le regarder comme étant le spectre de $f(x)$ *moyennant la transformation* Δ;

d'ailleurs, rien ne limite le choix du symbole Δ qui peut exprimer une opération algébrique simple, un procédé récurrent, une dérivée d'ordre quelconque, une intégrale définie, etc. Ainsi, lorsque a_n est la racine carrée d'un entier, on peut prendre

$$\Delta[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{ti}) f\left(\frac{z e^{-ti}}{\rho}\right) dt,$$

ρ étant une constante arbitraire, inférieure au rayon du cercle de convergence de l'élément. On conçoit donc que le champ d'application de la représentation spectrale est extrêmement étendu.

Une objection, toutefois, pourrait se présenter. La représentation spectrale est nécessairement incompatible avec les groupes des opérations rationnelles de l'arithmétique et de l'algèbre. On pourrait donc craindre que, par le fait même, la portée de la méthode ne soit des plus restreintes. Ce serait là une opinion excessive; parcourons, en effet, les dernières pages de l'Ouvrage. Elles contiennent un grand nombre d'applications élégantes de la méthode spectrale. Posons, par exemple, $9h = 10^h - 1$, et soit

$$S = \frac{1}{9h} + \frac{1}{9^2 h} + \ldots + \frac{1}{9^m h} - 10^{-h}\frac{9^2 h}{9 \cdot 9h};$$

partageons la suite des premières décimales de S, formant l'ensemble de la partie périodique et de la première période, en tranches successives de h chiffres; cela étant, *l'entier formé par la $k^{ième}$ tranche coïncide avec le nombre des diviseurs de k autres que 1 et k.*

De même, on peut obtenir par la méthode spectrale le nombre des partitions d'un entier, la somme des puissances semblables d'entiers consécutifs, et le calcul de certaines intégrales définies. Enfin, appliquée à la Théorie des fonctions, la méthode fournit une classification régulière des fonctions analytiques. Par exemple, les fonctions du type $E(x)$ dépendent de deux paramètres :

1° L'entier β tel que les $|a_n|$ (ou les $\sqrt[n]{|a_n|}$) ne dépassent jamais la quantité $M \leqq \beta$;

2° Le spectre S, à rythme $h_k = \beta$ (ou βk).

Mais quelles sont les propriétés intrinsèques d'une telle classifica-

tion ? Et quel lien y a-t-il entre l'allure d'une fonction et les caractères arithmétiques de son spectre ? Les résultats obtenus jusqu'ici dans cette voie sont extrêmement clairsemés, ce qui s'explique aisément; car, suivant le mot de M. E. Borel, les difficultés d'un tel problème « sont énormes ». Il faut donc en savoir d'autant plus de gré à M. Petrovitch d'avoir posé la question sous une forme aussi expressive qu'originale.

René Garnier.

MÉLANGES.

LES BIQUADRATIQUES GAUCHES ;

Par M. R. de MONTESSUS de BALLORE.

L'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (1) donne une liste étendue de mathématiciens qui se sont occupés des biquadratiques gauches de première espèce, qui sont les intersections de deux surfaces de second ordre.

Ceux à qui nous sommes redevables des résultats les plus remarquables sont : Poncelet, Monge, Chasles, Cayley, Clebsch, Laguerre, Halphen, Cremona, Loria, Darboux, Plücker, tous illustres, aussi Killing, Enders, Hachette, R. Sturm, et enfin Painvin, peut-être le moins connu, qui, à peine cité par l'Encyclopédie, a étudié avec une incontestable maîtrise tous les cas possibles de l'intersection de deux surfaces du second ordre. Se basant sur cette propriété fondamentale de ces courbes, découverte par Poncelet, que *par toute biquadratique passent quatre cônes du second ordre*, et pas plus, Painvin (en même temps que R. Sturm et Cremona) classe les biquadratiques comme nous l'indiquerons.

Les équations réduites établies par Painvin permettent de former des équations paramétriques simples, et il y a lieu de penser que

(1) Édition française : Tome III, vol. 4, fasc. 1 (Gauthier-Villars et Cie, 1914).

l'étude des biquadratiques, jusqu'ici à peine ébauchée, pourrait en être grandement facilitée.

Nous allons résumer ce qu'on sait des principales propriétés de ces courbes, en nous dispensant, le plus souvent, de toute démonstration [1].

1. Soient $S = 0$, $T = 0$ les équations, en coordonnées tétraédriques, de deux quadriques. Quel que soit le paramètre λ, l'équation

$$\Sigma = S + \lambda T = 0$$

représentera une quadrique contenant la courbe intersection de S et de T; et il existe quatre valeurs de λ (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4), telles que les quadriques $S + \lambda_4 T = 0$, $S + \lambda_2 T = 0$, $S + \lambda_3 T = 0$, $S + \lambda_4 T = 0$ soient des cônes.

Ces quatre valeurs sont les racines de l'*équation en* λ :

$$\begin{vmatrix} \Sigma''_{xx} & \Sigma''_{xy} & \Sigma''_{xz} & \Sigma''_{xt} \\ \Sigma''_{yx} & \Sigma''_{yy} & \Sigma''_{yz} & \Sigma''_{yt} \\ \Sigma''_{zx} & \Sigma''_{zy} & \Sigma''_{zz} & \Sigma''_{zt} \\ \Sigma''_{tx} & \Sigma''_{ty} & \Sigma''_{tz} & \Sigma''_{tt} \end{vmatrix} = 0,$$

$$S'_x + \lambda_1 T'_x = 0, \qquad S'_y + \lambda_1 T'_y = 0, \qquad S'_z + \lambda_1 T'_z = 0, \qquad S'_t + \lambda_1 T'_t = 0.$$

Cela posé, Painvin distingue les biquadratiques que voici :

Première espèce : l'équation en λ a ses quatre racines réelles et distinctes, et les quatre cônes sont réels.

Deuxième espèce : l'équation λ a ses quatre racines réelles et distinctes, deux des quatre cônes sont réels et les deux autres sont imaginaires : notons de suite que *ces biquadratiques sont imaginaires.*

Troisième espèce : l'équation en λ a deux racines réelles distinctes et deux racines imaginaires; ici, deux des quatre cônes sont réels, les deux autres sont imaginaires.

Quatrième espèce : l'équation en λ a quatre racines imaginaires distinctes.

---

[1] Consulter : L. Painvin, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868; R. de Montessus de Ballore, *Introduction à la théorie des courbes gauches algébriques*, Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris (Croville-Morant, 1918).

Cinquième espèce : l'équation en λ a deux racines égales.

Sixième espèce : l'équation en λ a trois racines égales.

Si l'équation en λ a, soit deux couples de racines égales, soit quatre racines égales, la biquadratique dégénère en une courbe formée d'une cubique gauche et d'une ligne droite.

En choisissant convenablement les sommets du tétraèdre de référence, Painvin obtient, pour les différentes espèces de biquadratiques qu'on vient d'énumérer, des équations réduites qui vont être indiquées à propos de chacune d'elles. J'en ai déduit (*loc. cit.*) des équations paramétriques fort simples, qui seront également données, et qui m'ont conduit à compléter la classification de Painvin.

2. *Les biquadratiques des espèces* 1, 2, 3, 4 *sont dépourvues de points singuliers.*

En effet, c'est un principe général : *à une singularité de la courbe gauche correspond un contact des surfaces définissant la courbe.*

Soient alors deux quadriques (*rapportées à un système de coordonnées tétraédriques*)

$$S = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{14}xt$$
$$+ 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0,$$
$$T = B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + \ldots + 2B_{34}zt = 0;$$

nous supposerons le point $x = y = z = 0$ pris sur leur intersection; il en résultera que

$$A_{44} = B_{44} = 0:$$

leurs plans tangents en $x = y = z = 0$ ont respectivement pour équations

$$\frac{1}{2}S'_t = A_{14}x + A_{24}y + A_{34}z = 0,$$

$$\frac{1}{2}T'_t = B_{14}x + B_{24}y + B_{34}z = 0;$$

exprimons que ces plans tangents sont confondus, et, pour simplifier les calculs, exprimons qu'ils sont confondus suivant

le plan $z = 0$; cela suppose

$$A_{14} = A_{24} = B_{14} = B_{24} = 0.$$

Dans ce cas, l'équation λ (n° 1), relative aux deux quadriques, se trouve être

$$(A_{34} + \lambda B_{34})^2 [(A_{11} + \lambda B_{11})(A_{22} + \lambda B_{22}) - (A_{12} + \lambda B_{12})^2] = 0;$$

on voit que l'équation en λ admet une racine double, au moins, si l'on fait cette hypothèse que la biquadratique a un point singulier.

Les biquadratiques 5 *ont un point double ordinaire, et les biquadratiques* 6 *ont un point de rebroussement.*

APPLICATION DES FORMULES GÉNÉRALES DE CAYLEY ET AUTRES AUX BIQUADRATIQUES.

3. Rappelons quelques définitions, malgré qu'elles soient bien connues; cela nous permettra de préciser les notations qui seront usitées.

Degré d'une courbe gauche. — Si m est le nombre de points d'une courbe gauche Γ, non infiniment voisins les uns des autres, qui sont situés dans un plan quelconque, m est le *degré* de Γ.

Classe. — Soit n le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener à la courbe par un point donné : n est la *classe* de Γ. Par un point quelconque de l'espace, il passe n plans tangents à la développable engendrée par les tangentes à Γ.

Rang. — On nomme ainsi le nombre de tangentes à la courbe qui rencontrent une droite quelconque. Ce nombre r est celui des plans tangents à la courbe qu'on peut mener par la droite.

On désigne par β le nombre de *points de rebroussement* de la courbe Γ.

α est le nombre des plans *surosculateurs* ou *stationnaires*.

Deux tangentes non infiniment voisines peuvent se rencontrer; un plan quelconque peut contenir un certain nombre x de ces points de rencontre; on appelle ces points de rencontre : *points sur deux droites*.

Deux tangentes non infiniment voisines qui se rencontrent conduisent à la notion de *plan par deux droites*, qui sont les plans contenant deux tangentes : y est le nombre de plans par deux droites passant par un point quelconque.

On désigne par g le nombre de droites d'un même plan par lesquelles on peut mener deux plans osculateurs à la courbe; on nomme ces droites : *droites dans deux plans* ou *axes*.

Le plus important de tous les nombres à envisager est celui des droites (*réelles* ou *imaginaires*) issues d'un même point et rencontrant deux fois la courbe; on le représente par h; il est égal au *nombre de points doubles* de la projection conique ou cylindrique de Γ sur un plan arbitraire.

Si Γ n'a pas de points doubles, h est égal au nombre de cordes doubles, ou sécantes doubles, de Γ, issues d'un point quelconque de l'espace. Si Γ a t points doubles, on a

$$h = h_1 + t,$$

h_1 désignant le nombre de cordes doubles issues d'un point quelconque et rencontrant Γ en deux points distincts.

Formules de Cayley (1er groupe). — Ces formules sont, *quand la courbe n'a pas d'autres singularités que des points de rebroussement :*

$$n = r(r-1) - 2x - 3m, \qquad \alpha = 3r(r-2) - 6x - 8m,$$
$$r = n(n-1) - 2g - 3\alpha, \qquad m = 3n(n-2) - 6g - 8\alpha;$$

elles se réduisent à *trois;* on en déduit, par combinaison,

$$m - \alpha = 3(r-n), \qquad 2(x-g) = (r-n)(r+n-9).$$

Formules de Cayley (2e groupe). — Ce sont, *sous la même réserve que pour le premier groupe :*

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta, \qquad n = 3m(m-2) - 6h - 8\beta,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n, \qquad \beta = 3r(r-2) - 6y - 8n;$$

de ces dernières relations, *trois* seulement sont indépendantes: elles donnent lieu à celles-ci :

$$n - \beta = 3(r-m), \qquad 2(y-h) = (r-m)(r+m-9).$$

De plus, en combinant les formules des deux groupes, on a

$$\alpha - \beta = 2(n - m), \qquad x - y = n - m,$$
$$2(g - h) = (n - m)(n + m - 7).$$

Si Γ *a des singularités propres, autres que des points de rebroussement, il faut faire les modifications que voici.*

Les formules de Cayley s'obtiennent en partant des formules de Plücker, relatives aux courbes planes :

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa, \qquad \iota = 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa,$$
$$m = n(n-1) - 2\tau - 3\iota, \qquad \varkappa = 3n(n-2) - 6\tau - 8\iota.$$

On obtient le premier groupe, *écrit plus haut*, des formules de Cayley en faisant

$$m = r, \qquad n = n, \qquad \delta = x, \qquad \tau = g, \qquad \varkappa = m, \qquad \iota = \alpha,$$

et le second en prenant

$$m = m, \qquad n = r, \qquad \delta = h, \qquad \tau = y, \qquad \varkappa = \beta, \qquad \iota = n.$$

Mais, *si* Γ *a, en outre de* h_1 *points doubles apparents,* t *points doubles effectifs ou nœuds*, il faut remplacer le nombre δ des formules de Plücker, non plus par h, mais par $h_1 + t$.

Si le système constitué par Γ *et la développable correspondante possède* G *plans doubles*, il faut remplacer τ par $g + G$ (au lieu de g); *si ce système a* υ *droites stationnaires, ou droites contenant chacune trois points infiniment voisins du système*, $\varkappa$ doit être remplacé par $m + \upsilon$ au lieu de m et par $n + \upsilon$ au lieu de n; *enfin si le système a* ω *droites doubles*, il faut remplacer δ par $x + \omega$, au lieu de x, et τ par $y + \omega$, au lieu de y.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (ÉMILE). — NOTICE HISTORIQUE SUR LA VIE ET L'ŒUVRE DE LORD KELVIN, *lue dans la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences*, le 22 décembre 1919. 1 vol. in-4° de 39 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1919.

Le sujet que M. Émile Picard, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, a choisi pour son Discours à la séance publique annuelle de cette Académie, le 22 décembre 1919, mérite tout spécialement de retenir l'attention du monde mathématique.

Écrire une Notice sur la vie et l'œuvre de Lord Kelvin, c'est en effet esquisser, dans ses traits essentiels, l'œuvre d'un savant extraordinaire qui emplit de son activité plus d'un demi-siècle d'intense labeur scientifique et d'impressionnantes découvertes; c'est définir les caractères propres de cette œuvre, noter les progrès que la Science lui doit aux points de vue théorique et pratique, faire pressentir les orientations qu'elle est encore susceptible d'imprimer aux recherches nouvelles.

La Notice que M. Picard consacre à Lord Kelvin présente donc en un puissant raccourci l'œuvre si originale, si variée, si féconde et si importante de ce savant qui, sachant unir harmonieusement la théorie et la pratique, se révéla à la fois géomètre ingénieux et profond et inventeur des instruments les plus variés, professeur d'un rare talent et remarquable directeur de firme, théoricien pénétrant et fervent partisan de l'expérimentation et de la représentation concrète.

Ce que la Science doit à Lord Kelvin, M. Picard se plaît à le faire saillir successivement en insistant à chaque fois un peu et en respectant l'allure primesautière que, par sa nature si diversement et si heureusement douée, Lord Kelvin pouvait apporter à ses études, dans la variété desquelles il trouvait, comme le note M. Picard, le délassement nécessaire à sa constante activité.

Les mathématiciens, comme les physiciens, liront avec plaisir

comment s'entremêlent, au cours de la longue carrière de Lord Kelvin, la conception de théories nouvelles appelées au plus bel avenir scientifique ou pratique, l'invention de nombreux appareils électriques et nautiques, la publication de grands ouvrages et de remarquables mémoires, intéressants à des titres divers.

M. Émile Picard n'omet rien de ce qui est capital, depuis les beaux résultats qui firent remarquer de Liouville le futur Lord (à cette époque William Thomson) et le signalèrent au monde savant alors qu'il étudiait encore à l'Université de Cambridge, jusqu'aux dernières méditations que l'illustre savant consacra aux découvertes qui se faisaient en Physique sur le déclin de sa vie : rayons cathodiques, rayons X, rayons de Becquerel, radium.

M. Émile Picard montre donc Lord Kelvin attachant son nom à l'échelle absolue de température; tirant un de ses titres de gloire de l'introduction dans la Science de l'idée d'énergie utilisable, dont un des résultats fut de créer une doctrine de l'évolution du monde inorganique telle que nos conceptions de l'Univers matériel s'en trouvèrent changées; se trouvant précurseur d'Helmholtz par sa théorie de l'électrolyse, et précurseur aussi, par ses études sur les oscillations de l'électricité, des belles découvertes des ondes hertziennes et de la télégraphie sans fil.

Puis M. Picard explique d'une manière très attachante comment, par ses longues études du problème de la propagation de l'électricité dans un câble, sa clairvoyance des analogies et sa persévérance, Lord Kelvin réussit non seulement à poser le premier câble télégraphique reliant l'ancien et le nouveau monde, mais encore à résoudre, par l'invention du *siphon recorder*, la question capitale des récepteurs, devenant ainsi le grand créateur de la télégraphie transatlantique.

Ici, M. Picard a l'occasion de citer les inventions que Lord Kelvin fut amené à faire pour la sécurité de la navigation : son compas ou boussole, son déflecteur, son appareil de sondage, son *tide predicter*. Il mentionne aussi spécialement le *Traité de Philosophie naturelle* que Lord Kelvin écrivit en collaboration avec Tait, traité dont la première partie se distingue par des vues nouvelles en Mécanique analytique et par l'étude des effets réalisés par les gyrostats, et dont la seconde, relative à la Physique du globe et à la Cosmogonie, contient des conclusions que de nom-

breuses mesures, faites depuis lors, ont confirmées. M. Picard retrouve ensuite avec joie Lord Kelvin poursuivant ses travaux sur l'électricité, dotant la Science de ses électromètres, de ses voltmètres et surtout d'un système cohérent des mesures électriques qu'il parvint à faire adopter en union avec notre compatriote Mascart.

Jusque-là, M. Picard a suivi les travaux inspirés à Lord Kelvin par le monde visible. Mais ce grand homme de science ne fut pas seulement « le champion de cette Énergétique qu'il contribua grandement à fonder », il s'attaqua aussi aux mystères de l'invisible. Il chercha à pénétrer le secret de la constitution de la matière et de l'éther, d'où son hypothèse célèbre des *atomes tourbillons*, d'où aussi son idée postérieure qu'à l'éther et aux tourbillons il fallait ajouter l'électricité, d'où encore sa conception d'un éther gyrostatique qui résoudrait toute difficulté, d'où enfin ses célèbres Leçons d'Optique de Baltimore.

Ce serait insuffisamment faire connaître le génie de Lord Kelvin que de se borner à signaler la contribution, si importante et si variée soit-elle, qu'il apporte aux progrès de la Science; aussi M. Picard a-t-il eu grand soin d'exposer ce que Lord Kelvin a retrouvé par son propre effort de ce qui était déjà du patrimoine de la Science. C'est ainsi que nous apprenons comment il retrouva, à vingt ans, après Gauss et Chasles, eux-mêmes précédés par Green, une proposition célèbre du problème de l'induction électrique, puis, ayant à peine vingt-cinq ans, comment il aperçut la conciliation du principe de l'équivalence et du principe de Carnot, et beaucoup plus tard comment il redécouvrit la dispersion anomale.

M. Picard fait plus encore pour rendre intéressant et vivant le portrait qu'il trace de Lord Kelvin. Il décrit le milieu familial et intellectuel qui forma les jeunes années du futur savant; note les influences qu'il a subies au cours de ses études, nettement françaises d'abord, anglaises fort longtemps après; il le situe au milieu des savants dont il fut le continuateur ou le précurseur, rédigeant à cet effet de petits historiques aussi clairs qu'ils sont brefs; il étudie aussi la nature de l'esprit et de l'intelligence de Lord Kelvin, en signale les manifestations premières chez l'étudiant qu'il remarque érudit en mathématiques, zélé pour la vérité

scientifique, doué d'une grande capacité de découverte et déjà théoricien de grande valeur; il montrera plus loin quelle fut sa liberté vis-à-vis des idées scientifiques même les plus reçues, son enthousiasme à répandre les connaissances de la Science, son souci de bien définir le rôle et le but de la recherche scientifique. Tout ce que M. Picard cite à ce sujet serait à reproduire, mais le faire entraînerait trop loin dans l'analyse d'un travail où, comme dans celui-ci, la matière abonde.

Ajoutons seulement que M. Picard s'est attaché à nous faire aimer en même temps qu'admirer Lord Kelvin, en nous présentant un grand savant que d'innocents divertissements amusent, que la musique charme et qui, chaque année, dans son cours fait sur les instruments à vent une leçon dans laquelle il joint la pratique à la théorie; que le canotage passionne et que les choses de la mer attirent au point de se faire acheter par son père un bateau, puis plus tard d'acheter lui-même un yacht; un grand savant qui recherche la société des savants et qui aime sa ville d'adoption jusqu'à refuser les offres les plus pressantes des plus célèbres Universités anglaises; un grand savant qui ne craignait pas d'avouer où sa science s'arrêtait, bien que son nom fût acclamé « partout où la Science était honorée », que Glasgow lui eût accordé le droit de bourgeoisie et que l'Angleterre lui eût conféré le titre de chevalier et l'eût élevé à la pairie, lui réservant le même et suprême honneur qu'à Newton, la sépulture dans l'Abbaye de Westminster.

M. Picard a enrichi toute cette brillante Notice de documentation sur nos amis d'Outre-Manche, leur caractère, leurs mœurs universitaires et nationales, d'anecdotes qui font naître le sourire, de rectifications d'histoire des sciences.

Ceux qui en ont entendu la lecture ont pu garder ce souvenir que M. Émile Picard a écrit une belle et substantielle page à la gloire de Lord Kelvin, à la gloire de la philosophie naturelle, à la gloire des illustres français de notre grande école physico-mathématique qui surent préparer de si belles voies.

Ernest Lebon.

ROCQUES DESVALLÉES (H.). — TABLES LOGARITHMIQUES ET TRIGONOMÉTRIQUES A QUATRE DÉCIMALES (argument en arc et en temps) et *Tables à trois décimales*, à l'usage des physiciens et des navigateurs. 1 vol. in-8 raisin, XXIV-72 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

Dans la plupart des calculs que l'ingénieur, le physicien, l'astronome et le navigateur sont appelés à exécuter, l'usage des Tables de logarithmes à quatre décimales est, en général, suffisant.

M. H. Rocques Desvallées, calculateur principal au Bureau des Longitudes, vient de publier un ensemble de Tables de logarithmes à quatre décimales, dont l'emploi rendra des services nombreux aux savants, quand leurs recherches exigeront des calculs numériques. Avec ces Tables, l'interprétation est rendue plus facile et plus rapide, les erreurs dans les calculs sont le plus souvent évitées et, de plus, l'approximation du dernier chiffre se fait avec sûreté.

Il est avantageux, pour la solution de quelques problèmes, de diviser le degré en parties décimales; c'est pourquoi l'auteur donne une Table de logarithmes qui permet d'obtenir facilement la valeur correspondant au centième de degré, et même une valeur approchée correspondant au millième de degré.

Dans un grand nombre de calculs astronomiques et nautiques, les angles sont exprimés en divisant la circonférence en 24 heures; alors, pour se servir des Tables trigonométriques ordinaires, il faut convertir les heures en parties d'heure, en degrés et en parties de degré. Pour éviter les erreurs provenant de telles conversions, l'auteur donne des Tables des logarithmes des fonctions circulaires où l'argument est le temps.

Cet Ouvrage contient aussi les valeurs naturelles des fonctions circulaires, et les Tables logarithmiques et trigonométriques à trois décimales qui suffisent pour beaucoup de calculs rapides.

M. Rocques Desvallées a exposé amplement et clairement des exemples de tous les calculs que son Ouvrage permet d'exécuter (*voir* p. VII-XXIV); grâce à cette dernière partie de son Avertissement, le calculateur qui emploiera ses Tables ne sera jamais embarrassé.

Er. L.

MÉLANGES.

LES BIQUADRATIQUES GAUCHES

(*suite*);

PAR M. R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

AUTRES FORMULES. — Voici *trois* autres formules *non moins importantes que les formules de Cayley*, et relatives au cas où Γ est l'intersection *complète* de deux surfaces de degrés respectifs μ, ν. (Il n'en est pas ainsi pour les *cubiques gauches;* dans certains cas, deux quadriques se coupent suivant une courbe formée d'une ligne droite et d'une cubique; la cubique est une intersection *incomplète* de deux quadriques) :

$$m = \mu\nu, \qquad r = \mu\nu(\mu + \nu - 2) - 2t - 3\beta,$$

$$h = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1) + t.$$

Il résulte de ces deux DERNIÈRES *formules que si une courbe gauche* Γ *est l'intersection complète de deux surfaces de degrés* μ, ν (*c'est le cas des biquadratiques*) *le degré* m *de* Γ *est déterminé.*

De plus, *si l'on connaît le nombre* t *des nœuds de* Γ (c'est actuellement notre cas, n° 1), *le nombre* h *des points doubles de la courbe perspective de* Γ *sera déterminé.*

Si enfin on connaît le nombre β *des points de rebroussement* (nous connaissons β, n° 1), *le rang* r *de la biquadratique sera connu.*

Pour les biquadratiques, *nous connaissons donc actuellement* m, r, h, β, t.

Nous allons calculer les autres éléments.

BIQUADRATIQUES DES ESPÈCES 1, 2, 3, 4. — Ces biquadratiques sont dépourvues de points singuliers (2). Nous pouvons donc

appliquer les formules de Cayley *ordinaires*, en prenant

$$m = 4, \qquad t = 0, \qquad \beta = 0, \qquad r = \mu\nu(\mu + \nu - 2) = 8,$$
$$h = \frac{1}{2}\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1) = 2,$$

puis

$$\begin{aligned}
n &= r(r-1) - 2x - 3m = 56 - 2x - 12,\\
\alpha &= 3r(r-2) - 6x - 8m = 144 - 6x - 32,\\
r &= 8 = n(n-1) - 2g - 3\alpha,\\
n &= 24 - 12 = 12,\\
m &= 4 = r(r-1) - 2y - 3n = 56 - 2y - 3n,
\end{aligned}$$

où nous n'avons pris que deux formules du second groupe, la première étant identiquement vérifiée par les valeurs déjà connues de r, m, h, β.

Les cinq équations qu'on vient d'écrire déterminent n, x, α, g, y; on trouve

$$n = 12, \qquad x = 16, \qquad \alpha = 16, \qquad g = 38, \qquad y = 8.$$

On trouve de même (2) : pour les BIQUADRATIQUES DE CINQUIÈME ESPÈCE,

$$m = 4, \quad r = 6, \quad n = 6, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 0, \quad x = 6,$$
$$y = 4, \quad g = 6, \quad h = 3, \quad (t = 1),$$

et pour les BIQUADRATIQUES DE SIXIÈME ESPÈCE,

$$m = 4, \quad r = 5, \quad n = 4, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1,$$
$$x = 2, \quad y = 2, \quad g = 2, \quad (t = 0).$$

GENRES DES BIQUADRATIQUES.

4. *Biquadratiques des espèces* 1, 2, 3, 4. — Considérons deux quadratiques représentées en coordonnées cartésiennes par deux équations

$$\begin{aligned}
&A\,x^2 + A'\,y^2 + A''\,z^2 + 2B'\,yz + 2B''\,zx + 2B'''\,xy\\
&\qquad + 2C'\,x + 2C''\,y + 2C'''\,z + D = 0,\\
&A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B'_1\,yz + 2B''_1\,zx + 2B'''_1\,xy\\
&\qquad + 2C'_1\,x + 2C''_1\,y + 2C'''_1\,z + D_1 = 0;
\end{aligned}$$

éliminons z entre ces deux équations; nous obtiendrons ainsi

l'équation de la projection de Γ, intersection de deux quadriques, sur le plan xOy.

Cette projection est, nous le savons, une quartique plane *binodale*, puisque pour les biquadratiques d'espèces 1, 2, 3, 4, on a $h = 2$, $t = 0$, $\beta = 0$.

Or, l'équation générale des quartiques planes binodales est

$$x^2y^2 + u^2(ax^2 + by^2 + cu^2 + 2fyu + 2gux + 2hxy) = 0,$$

les *nœuds*, ou *points doubles*, étant les points communs à la droite $u = 0$ et aux droites $x = 0$, $y = 0$.

Posons $y = \alpha u$: l'équation précédente devient, en divisant par u^2 :

$$\alpha^2x^2 + ax^2 + b\alpha^2u^2 + cu^2 + 2f\alpha u^2 + 2gux + 2hx\alpha u = 0,$$

et l'on en tire

$$\frac{x}{u} = \frac{-(h\alpha + g) \pm \sqrt{(h\alpha + g)^2 - (\alpha^2 + a)(b\alpha^2 + 2f\alpha + c)}}{\alpha^2 + a}.$$

Le polynome $F(\alpha)$, qui figure sous le radical, est du quatrième degré en α.

On sait que α *et* $\sqrt{F(\alpha)}$ *peuvent être*, à la fois, *exprimés par des fonctions elliptiques de même argument;* on peut ainsi écrire

$$(a) \qquad \frac{x}{u} = \varphi_1(v), \qquad \alpha = \frac{y}{u} = \varphi_2(v),$$

φ_1 et φ_2 *étant des fonctions elliptiques de même argument.*

Soit

$$(b) \qquad u = px + qy + r = 0$$

l'équation développée de la droite $u = 0$. Les équations (a), (b) donneront, ψ_1 et ψ_2 étant encore des fonctions elliptiques de même argument :

$$(c) \qquad x = \psi_1(v), \qquad y = \psi_2(v).$$

Cela fait, si nous éliminons z^2 entre les équations des deux quadriques

$$Ax^2 + A'y^2 + \ldots = 0, \qquad A_1x^2 + A'_1y^2 + \ldots = 0,$$

nous en tirerons

$$z = \frac{\Pi(x, y)}{\mathrm{K}(x, y)},$$

et, en remplaçant x, y par leurs valeurs (c), z prendra à son tour la forme

$$z = \psi_3(v),$$

où ψ_3 sera une fonction elliptique de même argument que ψ_1, ψ_2.

Nous avons ainsi démontré, *très simplement,* après Clebsch, Killing, Enders, Halphen, Klein, Loria, que *les coordonnées d'un point d'une biquadratique d'espèces* 1, 2, 3, 4 *peuvent être représentées paramétriquement au moyen de fonctions elliptiques de même argument.*

Ces biquadratiques sont donc de genre 1.

Mais il est essentiel de remarquer que *cette démonstration conduit à une représentation entachée d'imaginaires, quand les points doubles de la quartique plane perspective sont imaginaires.*

Les biquadratiques d'espèces 5 *et* 6 *sont de genre zéro*, nous ne nous arrêterons pas à le démontrer ici.

ÉQUATIONS RÉDUITES DES BIQUADRATIQUES. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES.

5. Les équations réduites des biquadratiques gauches sont dues à Painvin [1]. J'en ai déduit [2] des équations paramétriques simples, qui vont être indiquées.

Première espèce. — On prend les sommets (réels et distincts) des quatre cônes pour sommets du tétraèdre de référence. Les équations réduites sont

$$\begin{cases} x^2 + a\,y^2 + b\,z^2 + c\,t^2 = 0, \\ x^2 + a_1 y^2 + b_1 z^2 + c_1 t^2 = 0, \end{cases}$$

et l'on trouve pour équations paramétriques

$$\frac{x}{\mu\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{y}{\nu\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{z}{\rho\,\mathrm{cn}\,u} = t.$$

---

(1) Painvin, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868, p. 79.

(2) R. de Montessus de Ballore, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1917, p. 103, et aussi : *Introduction à la théorie des courbes gauches algébriques* (Croville-Morant, 1918).

Observation. — On notera que l'x des formules paramétriques est l'une des variables x, y, z, t des équations réduites et non pas forcément x; de même pour l'y, etc. des formules paramétriques.

Deuxième espèce. — Nous ne l'étudions pas : la biquadratique est imaginaire.

Troisième espèce. — En choisissant convenablement le tétraèdre de référence, en prenant notamment les sommets C_1, C_2 des deux cônes réels pour sommets S_1, S_2 du tétraèdre, on arrive aux équations

$$(a) \qquad \begin{cases} y^2 + b\,(z^2 - t^2) + 2d\,zt = 0, \\ x^2 + b'(z^2 - t^2) + 2d'\,zt = 0, \end{cases}$$

qui admettent la représentation paramétrique

$$\frac{x}{\mu\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{y}{\nu\,\mathrm{cn}\,u} = \frac{z}{\rho\,\mathrm{cn}^2 u + \theta} = \frac{t}{\mathrm{cn}\,u - \rho\theta}, \qquad \left(k^2 = \frac{1}{1+\theta^2}\right).$$

Même *observation* que pour les biquadratiques de première espèce.

On notera que les biquadratiques de troisième espèce admettent aussi la représentation

$$(b) \qquad \frac{x}{\mu\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{y}{\nu\,\mathrm{cn}\,u} = \frac{z}{\mathrm{cn}^2 u + c} = \frac{t}{c},$$

et que tout système de cette forme représente une biquadratique de troisième espèce. Mais la correspondance entre les systèmes (a) et (b) n'est que partielle.

Quatrième espèce. — Ces biquadratiques admettent pour équations réduites :

$$\begin{cases} a_1(x^2 - y^2) + c_1(z^2 - t^2) + 2b_1 xy + 2d_1 zt = 0, \\ a_2(x^2 - y^2) + c_2(z^2 - t^2) + 2b_2 xy + 2d_2 zt = 0. \end{cases}$$

Les équations paramétriques sont compliquées; des imaginaires apparentes y figurent. Elles peuvent présenter deux formes distinctes, ce qui indiquerait la présence de deux sous-espèces.

Cinquième espèce. — Équations réduites :

$$\begin{cases} b_1 y^2 + c\,z^2 + d\,t^2 + 2xt = 0, \\ b\,y^2 + c_1 z^2 + d_1 t^2 + 2xt = 0. \end{cases}$$

Ces biquadratiques sont *unicursales*.

Elles admettent la représentation paramétrique très simple

$$\frac{x}{a+b\alpha^2}=\frac{y}{\alpha\sqrt{c\alpha^2+d}}=\frac{z}{e\alpha}=\frac{t}{f\alpha^2},$$

d'où l'on déduit facilement la représentation paramétrique *rationnelle*, mais compliquée,

$$\begin{aligned}&\frac{x}{a(\beta^2-c)^2+b(\alpha_0\beta^2-2u\beta+c\alpha_0)^2}\\&=\frac{y}{(\alpha_0\beta^2-2u_0\beta+c\alpha_0)(-u_0\beta^2+2c\alpha_0\beta-cu_0)}\\&=\frac{z}{e(\alpha_0\beta^2-2u_0\beta+c\alpha_0)(\beta^2-c)}\\&=\frac{t}{f(\alpha_0\beta^2-2u_0\beta+c\alpha_0)^2}.\end{aligned}$$

On peut aussi représenter ces courbes par les deux systèmes *distincts* suivants :

$$(a)\qquad \frac{x}{\mu\sin^2\varphi+\beta}=\frac{y}{\nu\sin\varphi}=\frac{z}{\rho\cos\varphi}=t.$$

$$(b)\qquad \frac{x}{\mu\,\mathrm{sh}^2\varphi+\beta}=\frac{y}{\nu\,\mathrm{sh}\varphi}=\frac{z}{\rho\,\mathrm{ch}\varphi}=t.$$

Cette dernière forme est due à M. Vogt, jeune mathématicien qui donnait de grandes espérances.

On en conclut l'existence de deux sous-espèces (a) *et* (b).

Il est bon de noter que la sous-espèce (b) admet aussi la représentation

$$(\bar{b}b)\qquad \frac{x}{\mu\cos^2\varphi+\beta}=\frac{y}{\gamma\cos\varphi}=\frac{z}{\delta\sin\varphi\cos\varphi}=\frac{t}{\varepsilon\cos^2\varphi}.$$

Sixième espèce. — Équations réduites :

$$\begin{cases} ay^2+2xt+bz^2+2cyt=0,\\ k(ay^2+2xt)+bz^2+2cyt=0;\end{cases}$$

équations paramétriques :

$$\frac{x}{A\mu^4}=\frac{y}{B\mu^2}=\frac{z}{C\mu}=t.$$

Ces biquadratiques sont encore *unicursales*.

CLASSIFICATION DES BIQUADRATIQUES.

6. Ce que nous venons de dire conduit à une classification des biquadratiques différant un peu de celle qui a été admise jusqu'ici.

1° Biquadratiques de genre 1, dépourvues de point double et de point de rebroussement; représentation paramétrique :

$$(\varphi_1^1) \qquad \frac{x}{\mu} = \frac{y}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\rho \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u},$$

où le discriminant de l'équation en λ a ses quatre racines réelles, où, de plus, les quatre cônes du faisceau ponctuel de quadriques sont réels.

2° Biquadratiques de genre 1, également dépourvues de point double et de point de rebroussement; représentation paramétrique :

$$\frac{x}{\mu \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\nu \operatorname{cn} u} = \frac{z}{\operatorname{cn}^2 u + c} = \frac{t}{c};$$

ici, le discriminant a deux racines réelles distinctes et deux racines imaginaires; deux cônes sont réels, deux cônes sont imaginaires.

Il est plus conforme aux usages d'écrire

$$(\varphi_1^2) \qquad \frac{x}{\mu \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\operatorname{sn}^2 u + c} = \frac{t}{c}$$

3° Courbes de genre 1, encore dépourvues de point double et de point de rebroussement :

$$(\varphi_1^0) \qquad \begin{cases} a_1(x^2 - y^2) + c_1(z^2 - t^2) + 2b_1 xy + 2d_1 zt = 0, \\ a_2(x^2 - y^2) + c_2(z^2 - t^2) + 2b_2 xy + 2d_2 zt = 0; \end{cases}$$

la représentation paramétrique correspondante est compliquée d'imaginaires apparentes; le discriminant a ses quatre racines imaginaires. Il semble, d'après la représentation paramétrique à laquelle il est fait allusion, qu'il existe deux sous-espèces, qu'on pourrait désigner par φ_1^{01}, φ_2^{02}.

4° Courbes de genre zéro, ayant un point double ordinaire.

Deux sous-espèces. Représentations paramétriques :

$$(\varphi_0^{11}) \qquad \frac{x}{\mu \sin^2\varphi + \beta} = \frac{y}{\nu \sin\varphi} = \frac{z}{\rho \cos\varphi} = t,$$

$$(\varphi_0^{12}) \qquad \frac{x}{\mu \operatorname{sh}^2\varphi + \beta} = \frac{y}{\nu \operatorname{sh}\varphi} = \frac{z}{\rho \operatorname{ch}\varphi} = t;$$

l'équation en λ de ces biquadratiques a deux racines égales.

5° Courbes de genre zéro, ayant un point de rebroussement. Représentation paramétrique :

$$(\varphi_0^2) \qquad \frac{x}{a\mu^4} = \frac{y}{b\mu^2} = \frac{z}{c\mu} = t;$$

pour ces biquadratiques, l'équation en λ a trois racines égales.

Il y a lieu d'examiner à part le cas où trois cônes du faisceau de cylindres deviennent des cylindres, les coordonnées tétraédriques, usitées pour la classification précédente, ne pouvant plus être employées; *les biquadratiques correspondantes rentrent, comme cas particuliers, dans l'espèce* φ_1^4.

FORMES DES BIQUADRATIQUES.

7. Ces formes ne sont connues que dans des cas particuliers. La description d'ensemble n'a pas été faite. Il y a lieu de penser qu'il existe une trentaine de formes distinctes. Les équations réduites pourraient utilement servir à l'étude de cette question.

PROJECTIONS STÉRÉOGRAPHIQUES.

8. Si l'on représente une surface du second degré sur un plan par une projection stéréographique, une biquadratique φ_1^4, φ_1^2, φ_1^0 tracée sur cette surface a pour image une courbe plane du quatrième degré qui possède deux points doubles, correspondant aux deux droites doubles qui passent par le point de vue; une biquadratique φ_0^1 (φ_0^{11} ou φ_0^{12}) ou φ_0^2 a pour image une courbe ayant trois points doubles.

PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES DES BIQUADRATIQUES.

9. En premier lieu, on doit citer les PROPRIÉTÉS POLAIRES. Voici les principales.

Biquadratiques φ_1^4. — *Les sommets des quatre cônes passant par la courbe commune à deux surfaces du second ordre forment un tétraèdre conjugué par rapport à chacune de ces surfaces.*

Biquadratiques φ_1^2. — *Le plan polaire, par rapport à l'une ou l'autre des quadriques, d'un point quelconque de la ligne joignant les sommets* C_1 *et* C_2 *des deux cônes réels, passe par la droite réelle* $C_3 C_4$ *joignant les sommets imaginaires des deux cônes réels.*

Biquadratiques φ_0^{11} et φ_0^{12} (ou simplement φ_0^1). — Soient C_1 le sommet du cône correspondant à la racine double de l'équation en λ, et C_2, C_3 les sommets des cônes correspondant aux deux racines simples : *les trois points* C_1, C_2, C_3 *sont les seuls qui aient chacun même plan polaire par rapport aux deux quadriques.*

Quand un plan tourne autour de C_1, C_2, *ses pôles par rapport à chaque quadrique, qui sont distincts l'un de l'autre, décrivent la droite* $C_1 C_3$, *et réciproquement.*

Le cône correspondant à la racine double est conjugué par rapport au trièdre formé par les trois plans qui ont mêmes pôles par rapport aux deux surfaces.

Biquadratiques φ_0^2. — *Les sommets* C_1, C_2 *des deux cônes sont les seuls points ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques.*

Il en existe beaucoup d'autres.

AUTRES PROPRIÉTÉS.

10. Biquadratiques φ_1^4. — *La courbe se compose de deux branches, c'est le cas d'arrachement.*

Biquadratiques φ_1^2. — *Un plan quelconque passant par* $C_1 C_2$ *rencontre la biquadratique, ou bien en quatre points réels, ou bien en quatre points imaginaires.*

(*A suivre.*)

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS [1].

Dans sa première réunion du 24 décembre 1919, le Comité national français des Mathématiques, après avoir choisi comme président d'honneur : M. Jordan ; président : M. Émile Picard ; vice-présidents : MM. Appell, Borel, Lecornu, Le Roux ; secrétaire général : M. Kœnigs ; secrétaire : M. Galbrun ; trésorier : M. Maluski, s'est occupé de l'organisation du Congrès des Mathématiciens qui, suivant le vœu émis à Bruxelles par l'Union internationale provisoire des Mathématiciens [2], doit se tenir à Strasbourg, en 1920.

Il a l'honneur d'inviter à participer aux travaux du Congrès les mathématiciens des nations de l'Entente et ceux des nations neutres dont la liste a été arrêtée par la Troisième Conférence interalliée des Académies, tenue à Bruxelles en juillet 1919. Il leur fait savoir qu'il sera reconnaissant à chacun de lui adresser, le plus tôt possible, son adhésion personnelle, pour des raisons d'organisation faciles à comprendre.

La date de l'ouverture du Congrès sera fixée au 22 septembre.

Il se divisera en quatre sections qui seront subdivisées elles-mêmes en autant de sous-sections que le nombre et la nature des communications l'exigeront.

Section I : Arithmétique, Algèbre, Analyse.

Section II : Géométrie.

Section III : Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées.

---

[1] Nous reproduisons l'appel fait par le Comité national de Mathématiques pour un Congrès international des Mathématiciens.

[2] L'Union internationale provisoire, fondée par les mathématiciens présents à la Conférence interalliée des Académies scientifiques, tenue à Bruxelles en juillet 1919, a constitué son Bureau comme suit : présidents d'honneur : MM. Lamb, Picard, Volterra ; président : M. de la Vallée Poussin ; vice-président : M. Young ; secrétaires : MM. de Donder, Kœnigs, Petrowitch, Reina.

Deux jours avant l'ouverture du Congrès aura lieu la constitution définitive de l'Union mathématique internationale.

Section IV : Questions philosophiques, historiques, pédagogiques.

Des comptes rendus comportant au moins un résumé des travaux du Congrès seront envoyés à chaque souscripteur.

Un programme détaillé donnant les indications concernant le voyage et le logement, ainsi que celles relatives aux réceptions et excursions organisées, sera publié ultérieurement.

Le Président du Comité national français,

ÉMILE PICARD.

RENSEIGNEMENTS COMPLÉMENTAIRES.

I. Les droits d'inscription en qualité de Membre du Congrès sont fixés à 60 francs par personne payables à M. Valiron, trésorier du Congrès (52, Allée de la Robertsau, Strasbourg).

Moyennant une cotisation de 30 francs, toute personne de la famille d'un des membres aura droit aux mêmes privilèges que celui-ci, à l'exception de l'envoi d'un exemplaire des comptes rendus.

II. Toute personne désireuse de faire une ou plusieurs Communications au Congrès est priée d'en aviser M. Kœnigs, secrétaire général du Comité national français (96, boulevard Raspail, Paris), et de lui en faire connaître le sujet avant le 1er juillet.

III. Pour toute demande de renseignements, s'adresser soit à M. Kœnigs, soit à M. Villat, président du Comité local d'organisation du Congrès (11, rue du Maréchal-Pétain, à Strasbourg), soit à M. Galbrun, secrétaire du Comité national français (14, avenue Émile-Deschanel, Paris).

1ère Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANNUAIRE POUR L'AN 1920 *publié par le Bureau des Longitudes*. Avec des Notices scientifiques : 1° *La prévision de la houle*, par J. RENAUD (p. A.1-A.27); 2° *Les nouvelles unités légales de mesures industrielles*, par CH. LALLEMAND (p. B.1-B.64). 1 vol. in-16 de 822 pages, avec 14 figures, 5 cartes célestes et 3 cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920.

Pour signaler au public l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'an* 1920, rien n'est plus indiqué que de reproduire la partie de l'Avertissement consacrée au présent Volume, nous réservant de donner ensuite une idée des deux Notices, toutes deux importantes et de pleine actualité, qui feront rechercher cet Annuaire, l'une, par les navigateurs et les services publics chargés de l'aménagement des côtes, l'autre, par le très grand nombre de négociants et industriels qui ont intérêt à posséder le détail des lois récentes sur les nouvelles unités de mesure et qui sont, en même temps, désireux de connaître dans ses principes le nouveau système de mesures sanctionné par ces lois.

*
* *

En ce qui concerne le présent Volume, lit-on dans l'Avertissement, on a fait un certain nombre de suppressions dans les articles insérés aux *Annuaires* des années antérieures. Chaque suppression est indiquée à la place où l'article devrait figurer, avec un renvoi au Volume qui contenait le renseignement supprimé.

Dans le premier Chapitre, les Tables du calendrier ont été préparées par M. Rocques Desvallées.

Dans le troisième Chapitre, on a placé à la suite de l'article *Temps*, les renseignements sur les *Fuseaux horaires* et les Tableaux des *Heures légales* qui figuraient autrefois dans le quatrième Chapitre. Dans le même Chapitre figure la suite de l'article sur les *Cadrans solaires* (1918), par M. Bigourdan.

Le quatrième Chapitre ne contient que les Notes essentielles sur les *Mesures légales* et sur les *Monnaies*.

Dans le cinquième Chapitre (*Données physiques et chimiques*), un certain nombre de Tableaux ont été corrigés d'après les données qu'ont bien voulu fournir des spécialistes; celui de la *Densité des corps simples* a été revu par M. Hackspill, celui de la *Densité des substances diverses*, par M. Robert, ceux de la *Dilatation, des points de fusion et d'ébullition*, par M. Timmermans, celui des *Constantes relatives à l'état critique*, par M. Mathias, celui des *Longueurs d'onde*, par M. le général Ferrié (Ondes électriques) et par M. de Broglie (Radioactivité et rayons X), ceux des *Equivalents électrochimiques* et de *Thermochimie*, par M. Ch. Marie, ceux des *Principaux alliages industriels*, par M. Nicolardot, celui de la *Composition des différents combustibles*, par M. Oswald et ceux relatifs à l'*Analyse des vins, bières et cidres*, par M. Lutz.

*
* *

Dans sa Notice sur *La prévision de la houle*, M. J. Renaud donne des renseignements de la plus haute importance sur la connaissance et la prévision possible et nécessaire d'un phénomène qui n'est que trop fréquent, et dont les effets destructeurs sont à redouter tant pour la navigation que pour la prospérité économique.

M. J. Renaud, après avoir indiqué qu'il n'étudiera que les causes les plus fréquentes de la houle, c'est-à-dire les causes météorologiques, et après avoir tracé le plan de sa Notice, définit le phénomène, détermine les caractères des lames qui le composent, en résume la théorie et fait remarquer que l'expérimentation confirme les résultats donnés par l'analyse.

Ces résultats, touchant les dimensions de la houle, la transmission de l'agitation due à la houle, la transformation des lames de la houle, la force de la houle, sont à retenir. En voici l'essentiel :

« les dimensions d'une houle dépendent, d'une part, de la violence et de la durée du vent qui l'a produite, et, d'autre part, de l'étendue et de la profondeur de la mer dans laquelle elle se propage » ;

« en plein océan, l'agitation due à la houle s'étend à de grandes profondeurs » ;

« la houle, en arrivant sur le talus sous-marin qui se trouve en avant du rivage, change de forme » ;

« en un point donné du littoral, la profondeur à laquelle se forme le premier brisant caractérise le plus souvent la force de la houle ».

Ainsi se trouve mise en évidence la solidarité de phénomènes géographiques se manifestant à de très grandes distances l'un de l'autre, et la possibilité de la formation d'une houle dans de très lointaines régions subissant de graves troubles atmosphériques; d'où la nécessité, pour connaître le régime d'un littoral, d'en déterminer les influences lointaines, et, par conséquent, d'établir un service de renseignements avertissant du passage des cyclones et, dans les parages intéressés, des typhons.

Ayant indiqué la méthode à adopter dans la prévision des raz de marée, M. J. Renaud illustre son exposé d'un exemple très parlant : les côtes atlantiques du Maroc. Cet exemple significatif offre à M. J. Renaud l'occasion de déplorer que la création d'abris devant chaque ville du littoral n'ait pas précédé l'établissement d'un grand port et que, dans la construction d'un port, tel que celui de Casablanca, il se trouve des jetées établies par de trop grands fonds, jetées qui auront à subir, à l'occasion, le choc terrible du premier brisant.

Enfin, M. Renaud indique les travaux, assez peu nombreux malgré la gravité du problème, qui ont suivi sa première tentative (en 1905) de faire installer au Maroc un service de prévision de la houle. Il cite une lettre, du 19 mai 1913, du chef de la Division navale au Maroc, M. le capitaine de vaisseau Simon, le Mémoire de M. le lieutenant de vaisseau Lacroix étudiant la prévision des houles sur la côte atlantique du Maroc, et celui de l'enseigne de vaisseau M. Rolland, et il explique comment aucun des procédés préconisés ne fut adopté. Enfin, la question ayant été reprise en janvier 1919 par M. le capitaine Gain, attaché à la Section de Météorologie maritime au Service hydrographique, les règles de prévision qu'il propose ont été aussitôt mises à l'essai. Des radiotélégrammes quotidiens, envoyés de la Tour Eiffel aux stations du Maroc, annoncent la baisse barométrique qui se

produit en Irlande ou en Islande d'où la houle déferle sur la côte ouest marocaine. Avertie au moins 48 heures à l'avance, la station de Casablanca peut prédire à temps l'arrivée de la houle.

Le littoral atlantique français voisin de la côte espagnole, les côtes espagnoles atlantiques, les côtes portugaises, ainsi que la côte africaine sud marocaine ayant le même régime que la côte atlantique marocaine, le même procédé, qui présente déjà 90 pour 100 de probabilités et qui est susceptible d'amélioration, pourrait avec avantage leur être appliqué.

* * *

La Notice que M. Ch. Lallemand consacre aux nouvelles unités légales sanctionnées par la Loi du 2 avril 1919, pour les unités principales, et par le Décret du 26 juillet suivant, pour les unités secondaires, est un historique précieux concernant l'adoption du nouveau Système de mesures industrielles et commerciales.

M. Ch. Lallemand débute par un exposé relatif aux anciennes mesures qu'il énumère, dont il rappelle l'origine, dont il explique les noms et dont il relève les défauts. Cet exposé est suivi de résumés se rapportant au Système métrique, créé en 1795, plus cohérent, et qui a rencontré une faveur quasi universelle; au Système C. G. S. qui répond si bien aux besoins des physiciens, étant fondé sur l'emploi du *centimètre*, du *gramme* et de la *seconde* de temps moyen, mais qui, à cause de ses trop petites unités, ne peut constituer un système d'unités pratiques; enfin au Système d'unités électriques pratiques, que les électriciens ont substitué au Système C. G. S., et qui forme un groupe homogène, dont les unités sont l'*ohm*, le *volt*, l'*ampère*, le *coulomb*, le *joule*, le *watt*.

Pour satisfaire aux besoins de la technique industrielle, il fallait opérer dans les unités de masse et dans les unités mécaniques une transformation semblable à celle que les électriciens avait réalisée dans leur domaine propre. Il fallait aussi sanctionner les unités calorifiques et optiques déjà employées dans les transactions commerciales.

Une Commission interministérielle, dont M. Charles Lallemand faisait partie, fut chargée d'examiner la question. Après une

étude minutieuse, elle adopta le Système M. T. S., calqué sur le Système C. G. S., mais où le centimètre et le gramme sont remplacés par le *mètre* et la *tonne* répondant mieux aux besoins des grandes industries. Aux unités principales, mètre, tonne, seconde, sont adjointes, dans ce Système, des unités pour les angles et les densités, les quatre unités électriques pratiques de résistance, intensité de courant, différence de potentiel et quantité d'électricité, des unités calorifiques et des unités optiques.

Le projet de cette Commission, qui fut soumis aux Associations les plus intéressées, fut approuvé par la Commission de Métrologie usuelle, le Bureau national des Poids et Mesures et le Comité consultatif des Arts et Manufactures, par le Comité de la Conférence internationale des Poids et Mesures, et reçut enfin la haute sanction de l'Académie des Sciences qui, s'exprimant par l'organe de M. Violle, en des paroles mémorables déclara ne pouvoir « qu'approuver la pensée d'élargir notre législation des Poids et Mesures. A la France, ajoutait-elle, qui a donné au monde le Système métrique décimal, il appartenait d'en consacrer le développement sous une forme capable d'amener l'unification législative des mesures actuellement employées dans les transactions internationales ... ».

M. Lallemand termine sa Notice, si utile et si intéressante, par quelques indications complémentaires sur les nouvelles unités légales. Il signale les unités principales qui, pour la première fois, sont sanctionnées par la loi : la *seconde* (unité de temps), l'*ohm* (unité de résistance électrique), l'*ampère* (unité d'intensité de courant), le *degré centésimal* (unité de température), la *bougie décimale* (unité d'intensité lumineuse). Il signale aussi les principales innovations, réalisées par le Décret, pour les unités secondaires, c'est-à-dire pour les unités géométriques (à propos desquelles M. Lallemand donne des détails intéressants sur le litre), pour les unités mécaniques, les unités calorifiques, les unités optiques.

Enfin, M. Lallemand fait connaître les mesures transitoires qui laissent en usage, pour quelque temps, à titre provisoire, certaines unités géométriques et mécaniques.

A la suite de son exposé, M. Lallemand publie *in-extenso*, sous le titre : Documents annexes (p. B.22-B.63), la Loi du 2 avril

1919 sur les unités de mesures, avec le Tableau des étalons et des unités commerciales et industrielles qui suit le texte de la loi; le Décret du 26 juillet 1919 portant Règlement d'administration publique pour l'exécution de la loi du 2 avril, avec ses deux annexes relatives l'une au Tableau général des unités commerciales et industrielles, l'autre à la Correspondance des degrés Baumé et des densités.

Er. L.

MÉLANGES.

LES BIQUADRATIQUES GAUCHES

(*suite et fin*);

Par M. R. de MONTESSUS de BALLORE.

Biquadratiques φ_1^0. — *Un plan quelconque passant par* $C_1 C_2$ *ou* $C_3 C_4$ *ne rencontre cette courbe qu'en deux points réels. La biquadratique se compose de deux branches distinctes.*

Biquadratiques φ_0^1. — *Les points de contact des plans tangents menés à chacune des quadriques par la droite* $C_2 C_3$ *sont en ligne droite avec le point* C_1; *les quadriques se touchent en* C_1.

Les cônes ayant leurs sommets en C_2, C_3 *sont respectivement tangents au plan tangent commun* $C_1 C_2 C_3$ *aux deux quadriques;* $C_2 C_1$ *et* $C_3 C_1$ *sont les génératrices de contact.*

La biquadratique a un point double au point où les quadriques se touchent; les tangentes en ce point double sont les intersections du plan tangent commun avec le cône correspondant à la racine double de l'équation en λ: *ces tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point double aux sommets des deux autres cônes.*

Biquadratiques φ_0^2. — *La biquadratique a un point de rebroussement au point où les quadriques se touchent.*

PROPRIÉTÉS MISES EN ÉVIDENCE PAR LES REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES.

11. *Nous nous occuperons seulement des biquadratiques* φ_1^4, φ_2^4. Une étude analogue, *non encore faite*, pour les autres biquadratiques, donnerait des résultats tout à fait intéressants.

Soient, en coordonnées tétraédriques,

$$\frac{x}{\mu} = \frac{y}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\rho \operatorname{cn} u} = \frac{t}{\operatorname{dn} u},$$

les équations d'une biquadratique φ_1^4, et

$$\frac{x}{\mu \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \frac{y}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{z}{\operatorname{sn}^2 u + c} = \frac{t}{c},$$

celles d'une biquadratique φ_2^4.

Biquadratiques φ_1^4. — Les coordonnées tétraédriques sont les distances du point $M(x, y, z, t)$ aux plans $S_2 S_3 S_1$, $S_3 S_4 S_1$, $S_4 S_1 S_2$, $S_1 S_2 S_3$, où S_1, S_2, S_3, S_4 sont les sommets du tétraèdre de référence.

Prenons $S_4 S_1$, $S_4 S_2$, $S_4 S_3$ comme axes Ox', Oy', Oz' d'un système de coordonnées cartésiennes; x', y', z', longueurs des parallèles à $S_1 S_4$, $S_2 S_4$, $S_3 S_4$ menées par M et limitées aux plans $S_4 S_2 S_3$, $S_4 S_3 S_1$, $S_4 S_1 S_2$, sont liées à x, y, z par des relations

$$x = \alpha x', \qquad y = \beta y', \qquad z = \gamma z';$$

x, y, z, t sont, de plus, liés par une relation linéaire

$$px + qy + rz - t = s.$$

On a donc

$$\frac{\alpha x'}{\mu} = \frac{\beta y'}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{\gamma z'}{\rho \operatorname{cn} u} = \frac{p\alpha x' + q\beta y' + r\gamma z' - s}{\operatorname{dn} u},$$

et ces rapports sont égaux à celui-ci :

$$\frac{-s}{\operatorname{dn} u - p\mu - q\nu \operatorname{sn} u - r\rho \operatorname{cn} u},$$

de sorte que, en coordonnées cartésiennes (obliques), les biqua-

dratiques φ_1^4 sont représentées par un système de la forme

$$\frac{\alpha x'}{\mu} = \frac{\beta y'}{\nu \operatorname{sn} u} = \frac{\gamma z'}{\rho \operatorname{cn} u} = \frac{s}{p\mu + q\nu \operatorname{sn} u + r\rho \operatorname{cn} u - \operatorname{dn} u},$$

ce que nous écrirons, en simplifiant un peu l'écriture,

$$(\varphi_1^4) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{h + l \operatorname{sn} u + m \operatorname{cn} u + n \operatorname{dn} u}, \\ y &= \frac{b \operatorname{sn} u}{h + l \operatorname{sn} u + m \operatorname{cn} u + n \operatorname{dn} u}, \\ z &= \frac{c \operatorname{cn} u}{h + l \operatorname{sn} u + m \operatorname{cn} u + n \operatorname{dn} u}. \end{aligned} \right.$$

On trouve de même, pour les biquadratiques φ_1^2,

$$(\varphi_1^2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{f \operatorname{sn}^2 u + g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + h \operatorname{sn} u + j}, \\ y &= \frac{b \operatorname{sn} u}{f \operatorname{sn}^2 u + g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + h \operatorname{sn} u + j}, \\ z &= \frac{d}{f \operatorname{sn}^2 u + g \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + h \operatorname{sn} u + j}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on se donne x, y, z, on peut exprimer $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ par les formules suivantes :

$$(\varphi_1^4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sn} u = \frac{a}{b}\frac{y}{x}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{a}{c}\frac{z}{x}, \\ &\operatorname{dn} u = \frac{a}{n}\,\frac{1 - \frac{h}{a}x - \frac{l}{b}y - \frac{m}{c}z}{x}; \end{aligned} \right.$$

$$(\varphi_1^2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{sn} u = \frac{d}{b}\frac{y}{z}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{d}{a}\frac{z}{x}\frac{1}{\operatorname{dn} u} = \frac{d}{a}\frac{z}{x} : \left(+\sqrt{1 - k^2\frac{d^2}{b^2}\frac{y^2}{z^2}}\right), \\ &\operatorname{dn} u = +\sqrt{1 - k^2\frac{d^2}{b^2}\frac{y^2}{z^2}}. \end{aligned} \right.$$

Considérons un système de périodes appartenant à la fois à sn, cn, dn, par exemple $4\mathrm{K}$, $4i\mathrm{K}'$; soit P un parallélogramme des périodes $4\mathrm{K}$, $4i\mathrm{K}'$; il suffit de considérer les valeurs de u appartenant à ce parallélogramme.

Points réels de la biquadratique. — Les coordonnés x, y, z d'un point de la courbe sont réelles quand $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ le sont ensemble, c'est-à-dire quand u varie de zéro à $4\mathrm{K}$.

Condition pour que quatre points de la biquadratique soient dans un même plan. — Coupons la courbe par le plan Π, d'équation

$$(\Pi) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} (\text{pour } \varphi_1^1) \quad Aa + Bb\,\mathrm{sn}\,u + Cc\,\mathrm{cn}\,u \\ \qquad\qquad + D(h + l\,\mathrm{sn}\,u + m\,\mathrm{cn}\,u + n\,\mathrm{dn}\,u) = 0, \\ (\text{pour } \varphi_1^2) \quad Aa\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + Bb\,\mathrm{sn}\,u + Cd \\ \qquad\qquad + D(f\,\mathrm{sn}^2 u + g\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + h\,\mathrm{sn}\,u + j) = 0; \end{cases}$$

le premier membre, tant de l'une que de l'autre de ces équations, est une fonction elliptique ayant quatre pôles,

$$(2) \qquad iK', \quad iK + 2K, \quad -iK', \quad -iK' + 2K,$$

dans le parallélogramme P. Ce premier membre a donc aussi quatre zéros dans P; autrement dit, l'une ou l'autre des équations (1) a quatre racines u_1, u_2, u_3, u_4 auxquelles correspondent les quatre points communs au plan Π et à la biquadratique.

Comme la somme des zéros de la fonction elliptique qui constitue le premier membre de l'équation (1) ne diffère de la somme des pôles (2) de cette même fonction que par un multiple des périodes $4K$, $4iK'$, on a, entre u_1, u_2, u_3, u_4, la relation

$$(3) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4mK + 4niK'.$$

Si cette condition est vérifiée pour quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4, les quatre points correspondant à ces arguments sont dans un même plan.

En effet, construisons le plan passant par les trois points M_1, M_2, M_3, d'arguments u_1, u_2, u_3. Ce plan coupe la biquadratique en un quatrième point M_4, dont l'argument u'_4 vérifie la relation (3)

$$u_1 + u_2 + u_3 + u'_4 = 4m'K + 4n'iK';$$

donc

$$u_4 - u'_4 = 4(m' - m)K + 4(n - n')iK';$$

il en résulte qu'à u_4, u'_4 correspond le même point M_4, puisque le second membre est une période de sn, cn, dn : à u_4 correspond donc le point M_4, situé dans le plan M_1, M_2, M_3.

A toute propriété générale des fonctions elliptiques correspond, on le comprend par ce qui précède, une propriété des biquadratiques φ_1^1, φ_1^2. C'est ainsi que :

Il existe quatre plans bitangents passant par une tangente donnée ;

Le rapport anharmonique des quatre plans bitangents menés par la tangente en M_1 *reste constant quand* M_1 *se déplace sur la courbe; ce rapport est égal au carré du module* k^2 *des fonctions elliptiques servant à la représentation paramétrique ;*

D'un point de la biquadratique, on peut mener neuf plans osculateurs à la courbe ;

Toute biquadratique φ_1^1, φ_1^2 *a* 16 *sommets*, c'est-à-dire 16 points où il existe un plan bitangent dont les deux points de contact sont confondus; 8 *sommets sont réels*, 8 *sommets sont imaginaires ;*

Soit S une quadrique contenant la biquadratique : *une génératrice d'un système déterminé de* S *rencontre la biquadratique en deux points, dont les arguments* u_1, u_2 *ont une somme constante, à une période près, quand on passe d'une génératrice à une autre ;*

Polygones inscrits dans une biquadratique φ_1^1, φ_1^2, les côtés de ces polygones étant des génératrices d'une surface du second ordre passant par la courbe : *quand le quadrilatère se ferme, la somme des arguments de deux sommets consécutifs est un quart de période.*

Nous ne prolongerons pas cette énumération.

BIQUADRATIQUES PARTICULIÈRES.

12. *L'ellipse logarithmique* est l'intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un cylindre elliptique ayant même axe que le paraboloïde. Ses équations sont

$$x^2 + y^2 = 2kz, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

si l'on pose

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = b\cos\varphi,$$

on trouve

$$\frac{x}{2ka\sin\varphi} = \frac{y}{2kb\cos\varphi} = \frac{z}{(a^2-b^2)\sin^2\varphi + b^2} = \frac{1}{2k};$$

on voit que cette courbe appartient au premier sous-groupe φ_0^{11} des biquadratiques φ_0^1.

L'hyperbole logarithmique

$$x^2 + y^2 = 2kz, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est l'intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un cylindre hyperbolique ayant même axe que le paraboloïde. Elle appartient au sous-groupe φ_0^{12}; on en obtient une représentation paramétrique en posant

$$a = x\cos\varphi, \qquad \frac{a}{b}y = x\sin\varphi;$$

on peut aussi poser

$$x = a\,\mathrm{sh}\,\varphi, \qquad y = b\,\mathrm{ch}\,\varphi.$$

Considérons un grand cercle d'une sphère O et deux points A, B de ce grand cercle; soit maintenant M un point de la sphère, tel que

$$\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = 2c,$$

où MA, MB sont aussi deux arcs de grand cercle, et où c est une constante : *l'ensemble des points* M *de la sphère répondant à cette relation constitue une courbe appelée ellipse sphérique.*

Les ellipses sphériques sont des biquadratiques φ_1^1.

Ce sont les intersections de la sphère et de cônes ayant leurs sommets au centre de la sphère.

Les ellipses sphériques sont des cas particuliers des *cycliques*, *qui sont les biquadratiques intersections d'une sphère et d'une surface quelconque du second ordre.*

La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une cyclique est une cyclique.

Un choix convenable de cette transformation fait que la cyclique est transformée en elle-même : les cycliques sont ainsi sur la sphère des courbes analogues aux courbes planes *anallagmatiques.*

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES BIQUADRATIQUES GAUCHES.

Nous terminerons cette étude en rappelant les propriétés suivantes, bien connues, des courbes que nous étudions :

Une biquadratique est déterminée par huit points;

Chacun des quatre cônes du second degré passant par une biquadratique a quatre génératrices tangentes à la courbe, et les quatre points de contact des génératrices d'un même cône tangentes à la courbe sont dans un même plan;

Par sept points, on peut faire passer une infinité de biquadratiques gauches de première espèce, non toutes situées sur une même surface du second ordre : toutes ces biquadratiques ont un huitième point commun;

Il existe une infinité d'hyperboloïdes à une nappe passant par une biquadratique donnée, et une génératrice quelconque d'un de ces hyperboloïdes rencontre la courbe en deux points;

Aucune droite ne rencontre une biquadratique en plus de deux points;

Si une biquadratique a un point multiple, c'est un point double, ou un point de rebroussement;

Le point est de rebroussement si la biquadratique est définie par une surface du second ordre et par un cône tangent à cette surface;

Le point double peut être isolé.

Note. — Il ne semble pas que l'œuvre du mathématicien L. Painvin, né en 1826 à Malesherbes, Loiret, mort à Paris en 1875, soit appréciée à sa valeur.

Professeur de Mathématiques spéciales à Douai, à Lyon, au lycée Louis-le-Grand, collaborateur aux *Annales de Terquem*, au *Journal de Liouville*, au *Journal de Crelle*, au *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* de Houël et Darboux, où l'on trouve (tome IX, 2e semestre de 1875) un court article nécrologique et la liste complète de ses travaux; il venait d'être nommé professeur suppléant de Mécanique rationnelle à la Sorbonne, quand il fut prématurément enlevé à la Science.

Je dois ces renseignements à son fils, M. G. Painvin, directeur de la Société des Ateliers et Chantiers de la Loire. Un de ses petits-fils, M. G. Painvin, est actuellement professeur de Paléontologie à l'École nationale supérieure des Mines.

APPLICATION DE DEUX SURFACES L'UNE SUR L'AUTRE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Deux surfaces S, S_1, réelles et analytiques sont supposées applicables l'une sur l'autre. Les coordonnées d'un point M de la première, d'un point M_1 de la seconde peuvent être exprimées respectivement par des équations

$$(M) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$
$$(M_1) \qquad x_1 = f_1(u_1, v_1), \qquad y_1 = \varphi_1(u_1, v_1), \qquad z_1 = \psi_1(u_1, v_1),$$

où les six fonctions $f, \varphi, \ldots, \psi_1$ sont des fonctions analytiques réelles; les valeurs réelles de u, v ou de u_1, v_1 définissent les points réels de S ou S_1; les valeurs complexes définissent les points imaginaires.

Si S et S_1 sont algébriques, les singularités de ces surfaces sont soit des points isolés, soit des courbes isolées, et ces surfaces n'ont pas de ligne d'arrêt. Dans ce qui suit, il n'est pas nécessaire de supposer les surfaces algébriques, mais simplement que l'une et l'autre n'ont que des singularités analogues à celles des surfaces algébriques.

Il est clair aussi que, si S n'est pas connexe, je pourrai la décomposer en morceaux séparés dont chacun est connexe; je me borne alors à l'un d'eux. Je supposerai donc dans la suite que S et S_1 sont des surfaces connexes.

2. Les équations (M) et (M_1) données, de simples éliminations et différentiations permettent de reconnaître si les deux surfaces sont ou non applicables; cette vérification est supposée déjà faite et résolue par l'affirmative; elle a permis aussi, avant de réaliser l'application effective point par point, de discerner les trois catégories suivantes :

Première catégorie. — S, et par suite S_1, est à courbure totale constante : pour achever, il faut déterminer les géodésiques de S

et S_1 : quadratures, si les deux surfaces sont développables, ou intégration de deux équations de Riccati si la courbure totale constante commune n'est pas nulle. Il y a une infinité de modes d'application de S sur S_1, dépendant de trois paramètres arbitraires.

Deuxième catégorie. — S, et par suite S_1, est à courbure variable, mais applicable sur une surface de révolution; pour continuer, il faut une quadrature sur chaque surface et il y a une infinité de modes d'application de S sur S_1, à un seul paramètre.

Troisième catégorie. — S et S_1 ne sont applicables sur aucune surface de révolution; les opérations de vérification déjà faites suffisent à établir une correspondance point par point entre S et S_1. Si donc S et S_1 sont algébriques toutes deux, la correspondance est algébrique, de sorte qu'à chaque point de S correspond sur S_1 un nombre fixe et constant de points, soit p_1, où p_1 est un entier au moins égal à l'unité; de même à chaque point de S_1 correspondent p points de S.

Si l'entier p surpasse l'unité, il résulte évidemment de là que S peut être décomposée en p morceaux, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$ deux à deux susceptibles de se recouvrir en totalité : la surface S admet alors un nombre fini d'applications sur elle-même : employons le mot *auto-application* pour abréger.

Ces simples considérations montrent qu'il est intéressant d'étudier les surfaces, algébriques ou transcendantes, admettant des auto-applications, de reconnaître sur de telles surfaces la configuration des morceaux $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... et de voir comment ils sont susceptibles de s'échanger. A ce point de vue, l'étude des surfaces admettant les plans de symétrie ou les rotations des polyèdres réguliers donnera des indications précieuses.

Si l'on suppose que les deux surfaces S et S_1 n'admettent ni l'une ni l'autre d'auto-application, nous sommes nécessairement dans la troisième catégorie; à tout point M de S correspond un point M_1 et un seul de S_1, ce qui exige que M et M_1 soient simultanément ou réels ou imaginaires. Recouvrons S d'un canevas de fil inextensible et flexible : ce canevas pourra être détaché de S et étalé sur S_1; on pourra affirmer que l'ensemble des portions

réelles de S recouvre exactement et une seule fois l'ensemble des portions réelles de S_1.

3. Or j'ai montré, dans une Note des *Comptes rendus* (17 mars 1919), que si deux surfaces réelles S et S_1 sont applicables l'une sur l'autre, il n'existe pas nécessairement de portion réelle, si petite soit-elle, de l'une, susceptible de recouvrir une portion réelle de l'autre. J'ai convenu de dire que l'application est de *première espèce* au voisinage du point réel M si le point M a un correspondant réel M_1 de sorte qu'une région réelle σ suffisamment petite au voisinage de M a pour homologue une région réelle σ_1 au voisinage de M_1; je dis que l'application est de *seconde espèce* si, au contraire, le correspondant de M est imaginaire, de sorte qu'une région suffisamment étendue entourant M sur S n'a pas d'homologue au point de vue *physique* sur S_1. Cette disposition est assez curieuse dans une correspondance dont la première idée semble avoir été empruntée à la notion expérimentale de déformation et de longueur.

Il importe donc de bien préciser les divers cas possibles : ils sont au nombre de trois, se présentant d'ailleurs indifféremment pour l'une ou l'autre des trois catégories déjà envisagées. Je vais d'abord énoncer sans démonstration ces trois cas; je reprendrai ensuite chacun et en donnerai des exemples concrets. Il sera bien entendu, qu'au cas où S et S_1 admettraient plusieurs modes d'application, j'en ai choisi *un* déterminé, à l'exclusion des autres.

Premier cas. — Aucun point réel de S n'a pour homologue un point réel de S_1, ce qui entraîne évidemment la même propriété pour chaque point de S_1. Chaque surface S et S_1 doit nécessairement admettre une auto-application.

Deuxième cas. — Sur S je peux séparer deux régions $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ telles qu'à tout point réel de $S^{(1)}$ corresponde un point réel de S_1 et qu'à tout point réel de $S^{(2)}$ ne corresponde plus de point réel. Les régions $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$ sont séparées par une courbe frontière réelle C qui n'a aucune raison *a priori* d'offrir de particularité, tandis que la courbe C_1 homologue de C sur S_1, réelle elle aussi, est nécessairement une *arête de rebroussement de* S_1; la surface S_1 peut être déformée, *sans altération de* C_1, de sorte que

les deux nappes de S_1 s'abordant tout le long de C_1 s'échangent l'une en l'autre. Dans l'application de S_1 sur S, l'une ou l'autre des deux nappes de S_1 peut recouvrir $S^{(1)}$, de sorte que $S^{(1)}$ peut être recouverte deux fois par S_1, si l'on a pris soin, avant le transport de S_1 sur S de découper la frontière C au ciseau et de ne conserver que $S^{(1)}$. Dans ces conditions, la région $S^{(1)}$ recouverte deux fois peut, à la rigueur, être considérée comme admettant la bordure C non comme frontière, mais comme arête de rebroussement.

Si l'on étudie de même la réalité du point de S correspondant à un point réel de S_1, il peut alors arriver soit que tout point réel de S_1 ait un homologue réel sur S, et par suite dans $S^{(1)}$, soit que la surface S_1 doive elle aussi être partagée en deux zones, $S_1^{(1)}$ et $S_1^{(2)}$ de même définition séparées par une courbe D_1 : la courbe D est alors comme précédemment arête de rebroussement sur S avec les mêmes particularités d'auto-application pour S.

Troisième cas. — A un point réel de chaque surface correspond toujours un point réel (ou plusieurs points réels) de l'autre.

4. J'étudie le premier cas; dans le mode d'application étudié, le point réel M a pour homologue un point M_1 imaginaire; le point imaginaire conjugué M'_1 appartient aussi à S_1 et la correspondance (M, M'_1) est un nouveau mode d'application de S sur S_1.

La correspondance (M_1, M'_1) est une auto-application de S_1 dont on aura les équations en écrivant que M_1 et M'_1 ont pour correspondant un même point de S dans chacune des deux applications entièrement connues de S_1 sur S.

L'exemple le plus simple est offert par la sphère. Une application de la sphère sur elle-même revient à un déplacement autour de son centre; un déplacement imaginaire quelconque revient à une rotation d'amplitude réelle autour d'un diamètre réel, suivie d'une rotation d'amplitude imaginaire pure autour d'un autre diamètre réel. Prenons, par exemple, le cas où le premier déplacement est nul et supposons que l'on ait pris pour axe Oz le diamètre axe de la rotation d'amplitude $i\alpha$.

Si x, y, z sont les coordonnées du point M et x_1, y_1, z_1 celles

du point M_1 obtenu par la rotation, on a

$$x_1 = x \operatorname{Ch}\alpha - iy \operatorname{Sh}\alpha, \qquad y_1 = ix \operatorname{Sh}\alpha + y \operatorname{Ch}\alpha, \qquad z_1 = z.$$

Si le point $M(x, y, z)$ est réel, le point M'_1 s'obtient évidemment en changeant α de signe, de sorte que M'_1 est le correspondant de M dans le déplacement inverse du précédent; la correspondance (M'_1, M_1) qui est l'auto-application prévue comme conséquence de l'application (M, M_1) est donc une rotation d'amplitude $2i\alpha$ autour de Oz.

Avec des exemples convenablement choisis, on peut s'arranger pour que l'auto-application finale soit une transformation par points réels. Dans la Note déjà citée, j'ai indiqué le moyen d'obtenir les surfaces de révolution d'axe Oz admettant une application de seconde espèce sur elles-mêmes définie en coordonnées semi-polaires r, θ, z par les formules $r_1 = ir$, $\theta_1 = i\theta$. Il suffit que $1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2$ soit une fonction impaire de r^2. Une tractrice de base Oz tournant autour de Oz donne une solution; une autre solution est fournie par la surface algébrique, définie pour chaque valeur de l'entier p par l'équation

$$z = \frac{r^{2p+2}}{(2p+2)\sqrt{2}} + \frac{1}{2p\sqrt{2}\, r^{2p}}.$$

Le point $M_1(ir, i\theta)$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_1 = ir \operatorname{Ch}\theta, \qquad y_1 = -r \operatorname{Sh}\theta, \\ z_1 = \dfrac{(-1)^{p+1} r^{2p+2}}{(2p+2)\sqrt{2}} + \dfrac{(-1)^p}{2p\sqrt{2}\, r^{2p}}. \end{cases}$$

Le point M'_1 est le symétrique de M_1 par rapport au plan yOz, de sorte que cette auto-application (M_1, M'_1) est cette fois une transformation par points réels.

J'ai indiqué un autre exemple très curieux; les surfaces réelles applicables sur le paraboloïde de révolution $x^2 + y^2 = 2pz$ se partagent en deux ensembles non dénombrables de même puissance : les surfaces S du premier ensemble sont toutes applicables physiquement et en totalité sur le paraboloïde; à chaque surface S correspond une surface W dont S est l'une des développées, tandis que la seconde développée est une surface S′ du second

ensemble; toutes les surfaces S′ sont applicables physiquement les unes sur les autres, mais aucune surface S′ n'est physiquement applicable ni sur le paraboloïde ni sur aucune surface de l'ensemble S.

Nous avons ainsi des exemples très étendus de ce premier cas, appartenant soit à la première, soit à la seconde catégorie définies au paragraphe 2. Il est facile de concevoir, sinon des exemples précis appartenant à la troisième catégorie, du moins des types de ds^2; par exemple, toute surface dont le ds^2 est, en coordonnées réelles x et y, du type

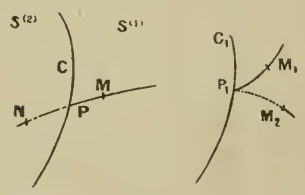
$$ds^2 = xy\,(dx^2 + dy^2)$$

n'est applicable sur aucune surface de révolution et admet l'auto-application de seconde espèce

$$x = ix_1, \qquad y = iy_1.$$

3. Examinons maintenant le second cas. Un point réel M de S, situé sur la fraction $S^{(1)}$ limitée par C, a un correspondant M_1 réel; en franchissant C et passant au point N de $S^{(2)}$, le correspondant N_1 est devenu imaginaire (*voir* figure 1). Le raisonnement

Fig. 1.



du paragraphe précédent s'applique : à N correspondent à la fois N_1 et le point conjugué N'_1, donc tout point de S pris sur $S^{(1)}$ ou $S^{(2)}$ a deux correspondants sur S_1, ces deux correspondants se confondent pour un point de C, sont imaginaires conjugués pour un point de $S^{(2)}$, et réels pour un point de $S^{(1)}$, puisque l'un d'eux est réel.

La courbe C a pour homologue une courbe C_1 : je trace un arc de courbe MN traversant C en P sans lui être tangent; chaque point M de l'arc MP a pour correspondants deux points réels M_1 et M_2, sauf P qui n'a pour correspondant que P_1.

Si l'arc de courbe MPN est analytique, il en est de même de la courbe $M_1 P_1 M_2$ et sur cette dernière nous pouvons exprimer les coordonnées d'un point quelconque en fonction d'un paramètre t de façon à avoir une représentation normale; les coordonnées du point correspondant de MP se trouvent par là même exprimées analytiquement en t; la représentation est cette fois impropre, ce qui ne nous gêne aucunement; la longueur d'arc en tous cas se conserve; si l'on va de M_1 en P_1 puis de P_1 en M_2, M va de M en P puis de P en M, donc l'arc élémentaire ds de la courbe MP s'annule en P, et par suite en P_1 l'arc élémentaire ds_1 s'annule; P_1 est donc point de rebroussement, et comme cela a lieu quel que soit P et quelle que soit la courbe passant par P, on en déduit que C_1 est bien arête de rebroussement.

Si donc la surface S n'est pas recouverte tout entière par la surface S_1, cela exige :

1° Que S_1 soit auto-applicable;

2° Que S_1 admette une arête de rebroussement C_1 et que l'on puisse, sans déformer C_1, appliquer l'une sur l'autre chacune des deux nappes de S_1 qui viennent se toucher le long de C_1.

Si S ni S_1 ne possèdent d'arête de rebroussement, il est impossible que le cas étudié dans ce paragraphe se réalise ; le premier cas ou le troisième cas sont alors seuls possibles.

Si une surface S possède une arête de rebroussement C et si les deux nappes qui s'abordent le long de C ne peuvent s'appliquer l'une sur l'autre, toutes les surfaces applicables sur S admettront nécessairement une arête de rebroussement, qui sera la transformée de C.

Je signale un résultat analytique commun au premier cas et au second cas. Soit un point $N(x, y, z)$ de $S^{(2)}$ (dans le premier cas $S^{(2)}$ coïncide avec toute l'étendue de S); soient $X_1 + iX_2$, $Y_1 + iY_2$, $Z_1 + iZ_2$ les coordonnées de N_1, on a

$$\begin{cases} dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 - dX_2^2 - dY_2^2 - dZ_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ dX_1\, dX_2 + dY_1\, dY_2 + dZ_1\, dZ_2 = 0, \end{cases}$$

les deux surfaces réelles (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires.

Dans le transport sur S du canevas flexible et inextensible tracé sur S_1, la portion $S^{(1)}$ est recouverte deux fois; si l'on donne sur la surface S le coup de ciseau qui sépare $S^{(1)}$ de $S^{(2)}$, cette portion de surface double $S^{(1)}$ peut être assimilée à une surface unique qui admettrait la ligne C comme arête de rebroussement. L'application de $S^{(1)}$ sur S_1 conduit à une représentation paramétrique impropre de la surface $S^{(1)}$. Il y a là un fait analytique analogue à celui que l'on trouve dans la représentation paramétrique des courbes unicursales suivant qu'il s'agit d'une représentation propre qui donne toute la courbe parcourue une seule fois, ou d'une représentation impropre qui, en général, pour les valeurs réelles du paramètre, ne donne qu'une fraction de la courbe limitée par des points qui peuvent être alors considérés comme des points de rebroussement. Si, au lieu de transporter S_1 sur S, on transporte S sur S_1, on aura l'embarras du choix au début, suivant que l'on transportera M sur M_1 ou sur M_2; imaginons M transporté sur M_1; si l'on suppose que le bord C_1 est une arête tranchante, le canevas de fil tracé sur S, recouvrant totalement S, se trouvera coupé tout le long de C, la portion $S^{(2)}$ se détachera et il ne restera que la portion $S^{(1)}$ soutenue par S_1.

On doit compléter l'étude en indiquant si à chaque point M_1 réel de S_1 correspond toujours un point réel (nécessairement compris dans $S^{(1)}$) ou si la surface S_1 se partage elle-même en deux régions $S_1^{(1)}$ et $S_1^{(2)}$ dont la première seule est recouverte physiquement par $S^{(1)}$. Il n'y a rien à ajouter dans la première hypothèse : la portion $S^{(1)}$ est susceptible de recouvrir physiquement et en totalité l'une quelconque des deux nappes de S_1.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FUBINI (Guido). — Lezioni di Analisi matematica (*Grande Biblioteca tecnica*, n° 9). Terza edizione interamente rifusa. [*Leçons d'Analyse mathématique* (Grande Bibliothèque technique, n° 9) 3e éd. entièrement refondue.] 1 vol. gr. in-8, VIII-512 pages. Torino, S. T. E. N. (Società tipografico editrice nazionale), 1919.

Avant d'être réunies en volume, les *Leçons d'Analyse* avaient été professées à l'École Polytechnique de Turin; destinées à de futurs ingénieurs, elles ont donc un caractère essentiellement pratique. C'est dire en même temps qu'elles touchent à l'un des problèmes les plus controversés de l'Enseignement : comment concilier les spéculations théoriques et les applications techniques; et comment trouver un terrain d'entente où puissent s'accorder leurs exigences, trop souvent opposées?

Ce problème, M. G. Fubini l'a résolu d'une manière très heureuse. Son procédé consiste à exposer la partie purement théorique d'une doctrine sous une forme aussi restreinte, mais aussi rigoureuse que possible, et susceptible en même temps d'une application immédiate. C'est ainsi que, lorsqu'il s'agit d'introduire une notion délicate, comme celle de limite, l'Auteur fait précéder la définition proprement dite d'une série d'exemples préliminaires (comme celui du pendule), destinés à en faciliter l'accès. La définition rigoureuse est présentée ensuite sous une forme très générale, grâce à un ingénieux dispositif qui s'applique indifféremment à une limite finie ou non. Puis, pour mieux faire saisir la portée de la définition, l'Auteur l'expose sous une forme nouvelle qui fait apparaître les notions de plus grande et de plus petite des limites. Enfin, une fois ces préliminaires solidement établis, il arrive aux applications qu'il choisit aussi nombreuses qu'importantes.

On le voit : M. Fubini n'a pas voulu donner à ses lecteurs un simple recueil de recettes pratiques, et d'ingénieux artifices; il a

voulu leur apprendre à fixer leur attention sur un sujet déterminé, à travailler avec méthode, et sans se contenter du vague et de l'à peu près. D'ailleurs, s'il rencontre une question dont la solution complète excéderait les limites du cours, il n'hésite pas à la signaler franchement, sans chercher à la masquer par un exposé d'une trompeuse simplicité.

Il nous est impossible de passer en revue les différents Chapitres de l'Ouvrage; en général, on peut dire que, par leurs sujets, sinon par leur forme d'exposition, ils se rapprochent sensiblement d'un Cours de Mathématiques générales. Pourtant, un certain nombre de questions dépassent le niveau habituel de cet enseignement: signalons, par exemple, l'application des déterminants de Vander Monde à la séparation des racines d'une équation; la résolution des équations implicites par approximations successives, la théorie des changements de variables dans les intégrales doubles, l'introduction du concept de fonction additive, ainsi qu'un aperçu de la théorie des séries de Fourier et du Calcul des Variations.

Indiquons enfin une heureuse innovation : l'Ouvrage se termine par une Table détaillée des principales applications qui rendra les plus grands services.

R. Garnier.

ASKWITH (E.-H.). — A COURSE OF PURE GEOMETRY *containing a complete geometrical treatment of the properties of the conic sections.* (Un cours de Géométrie pure contenant un exposé géométrique complet des propriétés des sections coniques.) 1 vol. in-8, XII-284 pages. Cambridge, University Press, 1917.

Dans cet Ouvrage les coniques sont définies comme sections planes de cônes à bases circulaires. Par le moyen de la seule Géométrie, c'est-à-dire avec un minimum de calculs, calculs non systématisés et ne faisant pas usage de coordonnées, l'auteur traite les questions suivantes : centres, diamètres, axes, tangentes, normales, pôles et polaires, foyers et directrices, courbure, asymptotes, involution sur une conique, théorèmes de Pascal et de Brianchon, théorème de Desargues. Il termine par trois Chapitres : un sur les points cycliques et la définition des foyers de Plücker, un autre sur l'inversion et un dernier sur la similitude.

L'Ouvrage a été écrit pour des étudiants, supposés ne sachant encore rien de toutes ces questions. Dans ces conditions, il me semble que ce n'est pas une méthode à préconiser que de se priver ainsi de toutes les ressources du calcul.

Car d'abord, s'il s'agit d'étudiants ne devant recevoir qu'une culture mathématique élémentaire, l'Ouvrage va beaucoup trop loin pour eux; et s'il s'agit d'étudiants devant recevoir une culture mathématique plus complète, on ne peut songer sérieusement à ne leur enseigner jamais la Géométrie analytique, et alors, referont-ils une seconde fois par le calcul tout ce qu'ils auront appris laborieusement par la Géométrie pure ?

Et puis il y a une autre objection plus grave. C'est que tous les résultats où interviennent des éléments imaginaires, même si ces résultats sont réels, sont difficiles à obtenir par la Géométrie. En fait, l'auteur les a passés sous silence, ce qui est une lacune regrettable. Par exemple, le théorème de Desargues est établi pour les coniques passant par quatre points réels. Mais ce théorème est aussi bien vrai pour les coniques passant par quatre points imaginaires. Or, ces coniques existent réellement si deux d'entre elles existent, et le théorème de Desargues constitue, dans ce cas, un résultat parfaitement réel. L'auteur n'en parle pas. Il aurait pu sans doute le faire, mais cela aurait exigé des développements qui auraient alourdi l'Ouvrage.

De même, le Chapitre sur les points cycliques et la définition des foyers de Plücker est absolument insuffisant et non rigoureux.

Ainsi, cette méthode de se priver systématiquement des ressources du calcul ne semble pas recommandable dans l'enseignement. Bien entendu, la méthode contraire, de se priver systématiquement du secours de la Géométrie (comme on l'a fait quelquefois en France) ne semble pas meilleure. Un bon enseignement doit user de l'un ou l'autre moyen, suivant les cas, de manière à arriver à la compréhension la plus parfaite des résultats.

L'Ouvrage dont nous parlons sera en tout cas d'une lecture très intéressante pour les étudiants connaissant déjà la théorie des sections coniques. Il intéressera aussi certainement les professeurs, ne fût-ce que par ses 477 énoncés de problème qui constitueront pour eux une mine d'exercices à proposer à leurs élèves.

Ajoutons pour terminer que, sauf les réserves faites plus haut,

nous n'avons que du bien à dire de l'Ouvrage. Il est bien rédigé et très clair. D'ailleurs, publié pour la première fois en 1903, il en est maintenant à sa troisième édition; c'est pour un Ouvrage de ce genre un beau succès.

E. Cahen.

MÉLANGES.

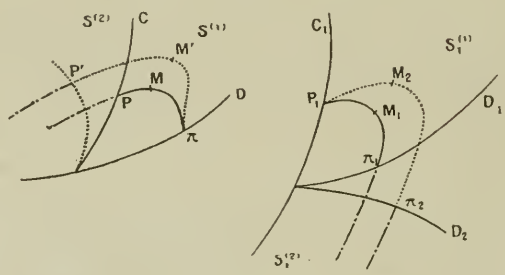
APPLICATION DE DEUX SURFACES L'UNE SUR L'AUTRE

(*suite et fin*);

Par M. Bertrand GAMBIER.

Dans la seconde hypothèse, S admet elle aussi une arête de rebroussement D avec auto-application sans déformation de D;

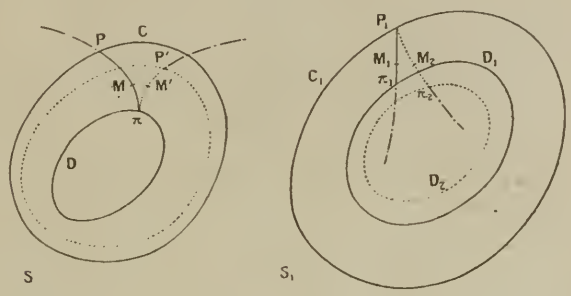
Fig. 2.



D a pour homologue sur S_1 une courbe D_1, D_2 de forme quelconque, mais constituée de deux morceaux D_1, D_2 situés respectivement sur chaque nappe de S_1. J'indique schématiquement deux dispositions possibles (*fig.* 2 et 3). De toutes façons, $S^{(1)}$ est constituée de deux morceaux pouvant l'un ou l'autre recouvrir l'un ou l'autre morceau dont se constitue S_1^1. J'ai supposé dans le dessin les surfaces opaques de façon que les parties cachées sont ponctuées; les portions sans correspondant sont marquées en traits mixtes. Les points M_1 et M_2 correspondent tous les deux soit à M, soit à M'; P_1 correspond à P ou P'; π_1 et π_2 correspondent tous

deux à π. Dans le cas de la figure 2, C rencontre D et le point de rencontre est un point de rebroussement pour C, et alors D_1 et D_2 rencontrent nécessairement C_1 en un point où l'ensemble D_1, D_2

Fig 3.



offre un rebroussement; dans le cas de la figure 3, la courbe C se compose de deux portions séparées ne rencontrant pas D, de sorte que D_1 et D_2 non plus ne rencontrent pas C_1. Mais je n'ai pas la prétention d'indiquer toutes les dispositions possibles.

Je donne maintenant quelques exemples : j'ai déjà signalé dans ma Note des *Comptes rendus* (17 mars 1919) la pseudosphère représentée par les équations

$$x = \sin\varphi \cos v, \qquad y = \sin\varphi \sin v, \qquad z = \cos\varphi + \log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2},$$

et je fais correspondre au point $M(\varphi, v)$ le point $M_1(\varphi_1, v_1)$ défini par les relations

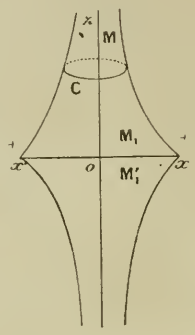
$$\sin\varphi = a \sin\varphi_1, \qquad v_1 = av,$$

où a est une constante réelle comprise entre 0 et 1. Le point M_1 décrivant toute la pseudosphère, le point M n'en décrit que la portion située au-dessus du parallèle C de rayon a; C est l'homologue du parallèle de rebroussement (*fig.* 4). L'auto-application (M_1, M'_1) de la surface déduite de la correspondance (M, M_1) ou (M, M'_1) se réduit à une symétrie par rapport à xOy. Ici, en faisant varier a de 1 à 0, nous avons une déformation continue de la pseudosphère.

Ne considérons que la moitié située au-dessus du plan horizontal, supposée recouverte une seule fois d'un canevas d'étoffe, qui aura été fendu tout le long de la demi-méridienne principale

située du côté de Ox' ; nous pouvons supposer que la demi-méridienne principale située dans le plan zOx glisse sur elle-même, chaque point descendant vers Ox ; les parallèles restent des parallèles, mais les deux bords du canevas situés d'abord dans le

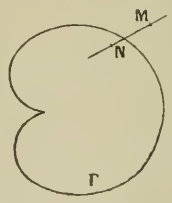
Fig. 4.



plan zOx' se détachent de façon qu'à chaque instant du mouvement il n'y ait que la fraction de la surface comprise entre les deux méridiens $\varphi = a\pi$ et $\varphi = -a\pi$ qui soit recouverte ; d'autre part, à mesure qu'un parallèle de la surface vient rencontrer le plan xOy, il se trouve sectionné par le bord tranchant constituant l'arête de rebroussement de la surface, et le morceau d'étoffe situé en-dessous de ce parallèle tombe sans continuer à pouvoir être utilisé comme revêtement de la surface. M. Darboux avait déjà attiré l'attention sur cet exemple (Tome 3 de la *Théorie des Surfaces*).

Un autre exemple très simple, emprunté encore à la première

Fig. 5.

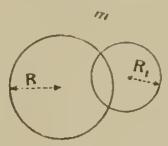


des catégories définies au paragraphe 2, est fourni par les surfaces développables. Si une telle surface S est étalée sur un plan P, le plan P se trouve recouvert deux fois au voisinage de la transformée Γ de l'arête de rebroussement C du côté où cette transformée Γ

tourne sa convexité, et cesse d'être recouvert de l'autre côté (*fig.* 5). Dans cet exemple, il est facile de mettre en évidence un fait qui n'est pas en contradiction avec le raisonnement général de ce paragraphe; supposons que Γ soit un cardioïde ou une courbe de forme analogue; par chaque point du plan P je peux mener une tangente réelle (au moins) à la courbe Γ, de sorte que chaque point du plan P a toujours un correspondant réel (au moins) sur la surface développable; mais si je tiens compte de *tous* les correspondants du point de P, je vois qu'un couple de ces correspondants disparaît si je passe de l'extérieur de la courbe à l'intérieur sur un arc tel que MN, de sorte qu'en me bornant à ce couple disparu, je dois bien considérer M comme ayant un homologue, et N comme n'en ayant plus. Cette remarque est générale.

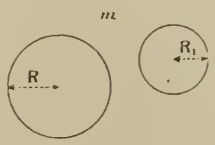
Si je considère simultanément deux surfaces développables S, S_1, je les applique toutes deux sur un même plan P et je fais correspondre les points M de S et M_1 de S_1 qui sont venus se superposer

Fig. 6.



à un même point *m* de P : nous avons ainsi un recouvrement mutuel de S et S_1, où les droites de l'une cessent d'être rectilignes, après la déformation. Supposons, pour fixer les idées, que les

Fig. 7.



rayons de courbure des arêtes de rebroussement soient toutes deux des constantes R et R_1 (R et R_1 peuvent être égaux ou non) : suivant que l'on aura porté les surfaces sur le plan P de façon que les cercles transformés des arêtes soient sécants ou extérieurs (*fig.* 6 et 7), on réalise soit la disposition de la figure 2, soit la disposition de la figure 3 dans le recouvrement de S et S_1.

Ce même exemple des développables peut encore servir à élucider ce qui doit se passer lorsqu'une des surfaces S possède une arête de rebroussement se décomposant en plusieurs courbes analytiquement distinctes. Je prends la développable S engendrée par les tangentes à la courbe

$$X = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{4r}\left[\frac{r-p}{2p+r}\cos(2p+r)\varphi - \frac{r+p}{2p-r}\cos(r-2p)\varphi - 2\cos r\varphi\right],$$

$$Y = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{4r}\left[\frac{r-p}{2p+r}\sin(2p+r)\varphi - \frac{r+p}{2p-r}\sin(r-2p)\varphi - 2\sin r\varphi\right],$$

$$Z = -\frac{r^2-p^2}{2pr}\sin^2 p\varphi,$$

dont le rayon de courbure est constant, égal à 1.

La constante r est supérieure à p; si p et r sont entiers, on a une courbe unicursale et, dans ce cas, on pourra supposer r impair; a, a', a'' désignant les cosinus de la tangente, b, b', b'' ceux de la normale principale; c, c', c'' ceux de la binormale, S l'arc de la courbe X, Y, Z et σ celui de la courbe a, a', a'', on a

$$a = \frac{r-p}{2r}\cos(p+r)\varphi - \frac{r+p}{2r}\cos(r-p)\varphi,$$

$$a' = \frac{r-p}{2r}\sin(p+r)\varphi - \frac{r+p}{2r}\sin(r-p)\varphi,$$

$$a'' = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{r}\cos p\varphi:$$

$$b = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{r}\cos r\varphi,$$

$$b' = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{r}\sin r\varphi,$$

$$b'' = \frac{p}{r};$$

$$c = \frac{p-r}{2r}\sin(p+r)\varphi + \frac{p+r}{2r}\sin(p-r)\varphi,$$

$$c' = \frac{r-p}{2r}\cos(p+r)\varphi + \frac{r+p}{2r}\cos(p-r)\varphi,$$

$$c'' = -\frac{\sqrt{r^2-p^2}}{p}\sin p\varphi;$$

$$S = \sigma = \frac{\sqrt{r^2-p^2}}{p}\cos p\varphi,$$

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{d\sigma}{d\varphi} = -\sqrt{r^2-p^2}\sin p\varphi.$$

La surface S se compose de $2p$ portions se déduisant les unes des autres par des rotations successives de $\frac{\pi}{p}$ autour de Oz; l'une de ces portions s'obtiendra en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{p}$; or pour les valeurs de φ égales à $k\frac{\pi}{p}$, où k est un entier quelconque, on a un point de rebroussement pour l'arête de rebroussement (X, Y, Z), avec un rayon de courbure non nul, puisque partout le rayon de courbure est constant et égal à 1; cela tient à ce que l'indicatrice des courbures a elle aussi un rebroussement; la génératrice G obtenue pour $\varphi = 0$ est dans le plan xOz, et le plan tangent correspondant est le plan xOz, plan qui est plan de symétrie de la surface : donc G est elle aussi une ligne de rebroussement de la surface, la symétrie xOz est une auto-application de la surface S où chaque point de G se correspond à lui-même. L'ensemble des lignes de rebroussement de la surface se compose donc :

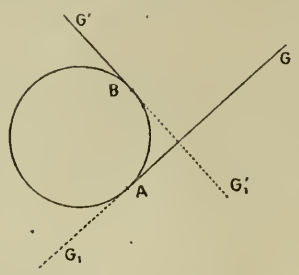
1° De l'arête proprement dite de rebroussement;

2° Des $2p$ génératrices déduites de G par des rotations de $\frac{\pi}{p}$ autour de Oz.

Chacune de ces lignes donne lieu à une auto-application de la surface, distincte des auto-applications relatives aux autres lignes. Dans l'auto-application relative à une de ces lignes, cette ligne se conserve point pour point, mais les autres lignes s'échangent. Le développement de la surface sur le plan ne se compose plus comme pour l'hélicoïde développable de toute la portion du plan extérieur à un cercle; ici sur un cercle de rayon égal à l'unité nous porterons un arc AB égal à $\frac{2\sqrt{r^2-p^2}}{p}$; supposons (*fig.* 8) le plan composé de deux feuillets superposés et marquons les demi-tangentes AG, BG′ sur le feuillet supérieur; les demi-tangentes opposées AG_1, BG'_1 sur le feuillet inférieur; la surface appliquée sur le plan recouvrira $2p$ fois la région du feuillet supérieur comprise entre AG et BG′ à l'extérieur du cercle et $2p$ fois la région analogue comprise entre AG_1 et BG'_1 à l'extérieur du cercle sur le feuillet inférieur. Les trois lignes tracées sur le plan : circonférence AB, et tangentes en A et B séparent sur le plan diverses régions telles que pour chacune le nombre de correspondants sur S est 0, $2p$ ou $4p$.

On a bien retrouvé tous les résultats prévus *a priori*. Dans cet exemple, considérons encore une surface S_1 définie comme S, mais

Fig. 8.

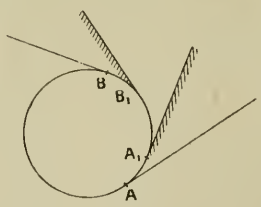


avec deux entiers r_1 et p_1 différents ; supposons pour fixer les idées $\frac{p_1}{r_1} > \frac{p}{r}$ et proposons-nous de trouver toutes les applications de S sur S_1 transformant les génératrices en génératrices. Elles sont données manifestement par la relation

$$\sqrt{\frac{r^2}{p^2} - 1}\cos p\varphi = \sqrt{\frac{r_1^2}{p_1^2} - 1}\cos p_1\varphi_1 + K,$$

où K est une constante arbitraire. Pour chaque valeur de K on a ainsi une transformation algébrique de chaque surface en l'autre ; on a une représentation commode de l'application en supposant les deux surfaces appliquées sur le plan de façon que les deux arêtes de rebroussement s'appliquent sur le même cercle ; on a alors

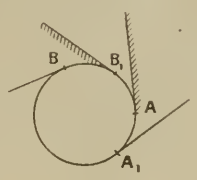
Fig. 9.



arc AB > arc A_1B_1 et deux seules dispositions possibles, si l'on suppose qu'effectivement une portion de l'une des surfaces est recouverte par l'autre : l'arc A_1B_1 tout entier intérieur à l'arc AB (*fig.* 9) ou l'arc A_1B_1 chevauchant sur l'arc AB (*fig.* 10) ; dans le premier cas, la surface S_1 recouvre $2p_1$ fois une fraction de la sur-

face S ; dans le second cas, les deux surfaces ne se recouvrent que sur une portion s'étendant d'une génératrice de rebroussement de l'une à la transformée d'une génératrice de rebroussement de l'autre.

Fig. 10.



Je terminerai ces exemples par un type emprunté à la seconde catégorie : la développée de la surface minima d'Enneper se compose de deux surfaces analytiquement distinctes, d'ailleurs égales. Prenons l'une d'elles : elle est représentée par les équations

$$x = 6\alpha + 6\alpha\beta^2 + 2\alpha^3,$$
$$y = -4\beta^3,$$
$$z = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 3\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{3}{2},$$

et l'on a aisément

$$ds^2 = 36(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 [d\alpha^2 + (\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta)^2].$$

La surface admet manifestement une infinité d'auto-applications algébriques définies par les relations

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$\alpha_1 = \alpha + K,$$

où K est une constante arbitraire. A chaque point (α, β) correspondent deux points (α_1, β_1) réels si $\beta^2 - 2K\alpha - K^2 > 0$ et de même à chaque point (α_1, β_1) correspondent deux points (α, β) réels si $\beta_1^2 + 2K\alpha_1 - K^2 > 0$. Comme les équations

$$\beta^2 - 2K\alpha - K^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1^2 + 2K\alpha_1 - K^2 = 0$$

représentent toutes deux des courbes réelles, il y a toujours des points de la surface considérés comme points (α, β) ou comme points (α_1, β_1) qui n'ont pas d'homologues réels. La courbe frontière $\beta_1^2 + 2K\alpha_1 - K^2 = 0$ correspond à $\beta = 0$, ligne de rebrous-

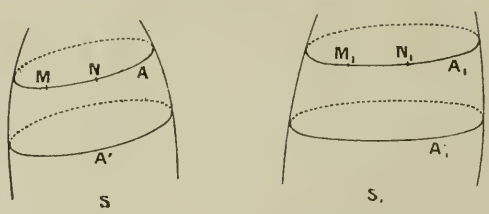
sement plane de la surface située dans le plan de symétrie zOx; cette symétrie est l'auto-application prévue par la théorie.

6. Dans le troisième cas annoncé au paragraphe 3, chaque point de la surface S ou de la surface S_1 est supposé avoir un correspondant réel sur l'autre. Dans ces conditions, ou bien S ni S_1 n'admettent d'arête de rebroussement ou bien S et S_1 admettent une arête de rebroussement; chaque point de l'arête de S admet alors pour correspondant un point de l'arête de S_1.

Ici, il va être avantageux d'envisager sur S la famille des courbes (A) le long desquelles la courbure totale de la surface a une valeur constante : ces courbes ont déjà été introduites par les calculs de vérifications préliminaires dont il a été question au paragraphe 2. Chacune de ces courbes (A) a pour homologue sur S_1 une (ou plusieurs) courbe (A_1) de même définition sur S_1. Une zone limitée sur S par deux courbes A, A′ a pour homologue sur S_1 une (ou plusieurs) zone limitée par les courbes homologues A_1, A'_1. Au cas où il y aurait plusieurs zones de S_1 correspondant à la zone A, A′ je n'en considérerais qu'une bien déterminée, négligeant les auto-applications de S_1 résultant de l'existence de plusieurs zones homologues de A, A′. Je n'ai en vue pour l'instant que l'étude de la correspondance entre deux zones homologues.

Je marque (*fig.* 11) sur la courbe A un point M arbitraire et sur la courbe A_1 dans le mode d'application (S, S_1) étudié le point

Fig. 11.



M_1 homologue; on peut évidemment prendre sur A et A_1 des sens positifs convenables pour les arcs tels que la correspondance point par point entre A et A_1 sera définie par arc MN = arc M_1N_1.

Si A s'étend à l'infini ainsi que A_1, puisque nous n'étudions que des morceaux de surface connexes, cette condition détermine d'une façon unique le point de A_1 correspondant à un point de A.

Si A ne s'étend pas à l'infini, elle est nécessairement fermée; soit L la longueur de la courbe A : si A_1 n'est pas fermée, en portant à partir de M_1 des arcs successifs M_1M_2, M_2M_3, ... tous égaux à L, on obtient des portions correspondant chacune à A et la surface S_1 se compose alors nécessairement d'un nombre illimité de morceaux tous applicables sur eux et sur S. La configuration de S_1 est analogue à celle d'une surface périodique.

Si A et A_1 sont fermées toutes deux, soient L et L_1 leurs longueurs : ou bien $L = L_1$ et alors S et S_1 se recouvrent totalement une fois et une fois seulement, tout au moins dans la région étudiée; ou bien $L \neq L_1$; alors on portera successivement à partir de M_1 des arcs M_1M_2, M_2M_3,... égaux à L, en décrivant, si c'est nécessaire, plusieurs tours sur A_1; chacun des points M_1, M_2, ... correspond dans l'application à M; si le rapport $\frac{L_1}{L}$ n'est pas commensurable, les points M_1, M_2,... sont en nombre illimité et il en résulte nécessairement que les surfaces S_1 et S sont applicables sur une surface de révolution.

Si le rapport $\frac{L_1}{L}$ est commensurable, égal à $\frac{p_1}{p}$, on revient en M_1 au bout de p tours; chaque point de A a p_1 correspondants sur A_1 à la distance $\frac{L_1}{p_1}$ les uns des autres et réciproquement, chaque point de A_1 a pour correspondants p points de A à la distance $\frac{L}{p}$ les uns des autres : d'ailleurs $\frac{L_1}{p_1} = \frac{L}{p}$. Donc S se compose de p morceaux applicables les uns sur les autres et offre une configuration analogue à celle d'une surface se reproduisant par une rotation d'amplitude $\frac{2\pi}{p}$ autour d'un axe fixe; pour S_1, mêmes remarques en remplaçant p par p_1.

Pour avoir des exemples simples, il suffira de recourir aux surfaces minima algébriques; les surfaces minima associées sont elles aussi algébriques et applicables algébriquement sur la surface initiale. Si l'on considère la surface minima représentée par les équations

$$x = \mathcal{R}\int (1 - u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du,$$
$$y = \mathcal{R}\int i(1 + u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du,$$
$$z = \mathcal{R}\int \quad 2u \quad \mathcal{F}(u)\,du,$$

tout zéro de $\mathcal{F}(u)$ donne un point de rebroussement de la courbe minima dont la translation engendre la surface : la trajectoire de ce point, qui est d'ailleurs une courbe minima de l'autre série, est une arête de rebroussement de la surface minima. Or, pour toutes les surfaces minima associées à la proposée, cette même valeur de u donne toujours une arête de rebroussement et ici on a donc un exemple curieux d'une arête de rebroussement qui conserve son caractère de ligne de rebroussement dans les déformations de la surface; on sait d'ailleurs que si deux surfaces minima sont applicables l'une sur l'autre, elles sont nécessairement deux surfaces associées, ou du moins susceptibles d'être déplacées de façon à devenir surfaces associées, de sorte qu'une surface minima ne peut admettre d'auto-application que si elle est égale à l'une de ces associées, fait extrêmement facile à reconnaître. On reconnaît ainsi qu'en aucun cas il n'y a d'auto-application d'une surface minima conservant la ligne de rebroussement point pour point; d'ailleurs si l'on prend une surface minima qui n'a aucune auto-application, il n'y a même pas lieu d'envisager cette question. Si l'on prend $\mathcal{F}(u) = 3i + 12mu$, où m est un paramètre réel, on a une surface minima algébrique n'ayant aucune auto-application.

Si l'on prend $\mathcal{F}(u) = Au^{m-2} + Bu^{2m-2}$, où m est un entier quelconque supérieur à l'unité, on a une surface minima se reproduisant par une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour de Oz; toutes les surfaces associées jouissent de la même propriété. Sur toutes, les lignes de courbure totale constante admettent aussi Oz comme axe de rotation et l'on a ainsi un exemple simple de deux surfaces telles qu'à chaque point de l'une corresponde un nombre fixe de points de l'autre, chacune des deux surfaces admettant une décomposition en m morceaux applicables les uns sur les autres. Ici ces morceaux sont même égaux et leur configuration est non seulement analogue, mais identique à celle que l'on obtient par une rotation.

7. Il est aisé de voir que toute ligne de rebroussement d'une surface minima est imaginaire.

Je crois intéressant de terminer cette étude en donnant un exemple de surfaces réelles applicables l'une sur l'autre, sans qu'aucune admette d'auto-application, et possédant chacune une

arête de rebroussement réelle; dans l'application, les arêtes s'appliqueront l'une sur l'autre.

Proposons-nous de chercher deux surfaces de translation S et S_1 applicables l'une sur l'autre de telle sorte que les courbes de S qui par leur translation engendrent S, dans l'une ou l'autre famille, aient pour homologues les courbes de même définition de S_1.

Si les courbes dont la translation engendre la surface sont minima, on retrouve le cas des surfaces minima associées. J'écarte donc ce cas, j'écris les équations de S

$$(S) \qquad x = A_1 + B_1, \qquad y = A_2 + B_2, \qquad z = A_3 + B_3;$$

celles de S_1

$$(S_1) \qquad x = a_1 + b_1, \qquad y = a_2 + b_2, \qquad z = a_3 + b_3,$$

où A_1, A_2, A_3, a_1, a_2, a_3 sont fonctions d'un paramètre t, tandis que B_1, B_2, B_3, b_1, b_2, b_3 sont fonctions d'un autre paramètre t_1.

La solution complète du problème est intéressante, mais je la réserve pour une autre étude afin de ne pas sortir de mon sujet. Je me contente d'indiquer le résultat; il y a trois groupes de solutions.

Premier groupe. — Soient trois constantes l, m, n et la courbe sphérique d'équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 = 1. \end{cases}$$

Sur cette courbe je pourrai exprimer au moyen d'un certain paramètre t les coordonnées d'un point variable x, y, z; soient

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

Soit $\mathfrak{F}(t)$ une fonction arbitraire; je poserai

$$(2) \qquad \begin{cases} A_1 = \int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt, & a_1 = l\int f_1(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt, \\ A_2 = \int f_2(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt, & a_2 = m\int f_2(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt, \\ A_3 = \int f_3(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt, & a_3 = n\int f_3(t)\,\mathfrak{F}(t)\,dt. \end{cases}$$

Soit, d'autre part, la courbe sphérique d'équations

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ \dfrac{x_1^2}{l^2} + \dfrac{y_1^2}{m^2} + \dfrac{z_1^2}{n^2} = 1. \end{cases}$$

On remarquera que si le point x, y, z est sur la courbe (1), le point $x_1 = lx$, $y_1 = ly$, $z_1 = lz$ est sur la courbe (3). Sur la courbe (3) on peut exprimer les coordonnées d'un point x_1, y_1, z_1 en fonction d'un certain paramètre t_1; soient

$$x_1 = \varphi_1(t_1), \qquad y_1 = \varphi_2(t_1), \qquad z_1 = \varphi_3(t_1).$$

Je poserai, $\mathcal{F}_1(t_1)$ étant une nouvelle fonction arbitraire,

$$(4)\qquad \begin{cases} B_1 = \int \varphi_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, & b_1 = \dfrac{1}{l}\int \varphi_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ B_2 = \int \varphi_2(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, & b_2 = \dfrac{1}{m}\int \varphi_2(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ B_3 = \int \varphi_3(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, & b_3 = \dfrac{1}{n}\int \varphi_3(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que S et S_1 ont toutes deux pour ds^2

$$(5)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & \mathcal{F}^2(t)\,dt^2 + \mathcal{F}_1^2(t_1)\,dt_1^2 \\ & + 2[f_1(t)\,\varphi_1(t_1) + f_2(t)\,\varphi_2(t_1) + f_3(t_1)\,\varphi_3(t_1)] \\ & \times \mathcal{F}(t)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt\,dt_1; \end{aligned}$$

donc S et S_1 sont bien applicables l'une sur l'autre.

Si l, m, n sont réelles, ainsi que les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1(t_1)$, on a deux surfaces réelles, admettant pour arêtes de rebroussement les courbes correspondant aux zéros de $\mathcal{F}(t)$ ou de $\mathcal{F}_1(t_1)$. Dans l'application ces arêtes se superposent.

On peut remarquer que sur la surface S les courbes égales $t_1 =$ const. ont pour indicatrice des courbures la courbe (1) et les courbes $t =$ const. pour indicatrice la courbe (3); sur la surface S_1 ces deux indicatrices des courbures correspondent au contraire aux courbes $t =$ const. et $t_1 =$ const. respectivement.

Deuxième groupe. — Je me contente d'écrire les équations

μ et ν désignant deux constantes arbitraires, S a pour équations

$$(S)\qquad \begin{cases} x = \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \mu \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ y = \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \nu \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ z = \int \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta_1 - \nu^2 \sin^2\theta_1}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1; \end{cases}$$

les courbes $\theta_1 =$ const. sont planes; ce sont d'ailleurs des courbes égales à une courbe plane quelconque. La surface S_1 a pour équations

$$(S_1)\qquad \begin{cases} x = \int \mu \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ y = \int \nu \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ z = \int \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta - \nu^2 \sin^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta; \end{cases}$$

les courbes $\theta =$ const. sur la surface S_1 sont planes, égales à une courbe plane arbitraire. La connaissance des deux courbes planes en question et des constantes μ, ν définit complètement les deux surfaces S et S_1; on a pour les deux surfaces

$$(6)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & \mathcal{F}^2(\theta)\, d\theta^2 + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\, d\theta_1^2 \\ & + 2(\mu \cos\theta \cos\theta_1 + \nu \sin\theta \sin\theta_1)\, \mathcal{F}(\theta)\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta\, d\theta_1, \end{aligned}$$

et les zéros de $\mathcal{F}(\theta)$ et $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ donnent les arêtes de rebroussement qui se correspondent.

Troisième groupe. — Cette fois, la surface S est engendrée par deux courbes planes arbitraires se déplaçant respectivement parallèlement à deux plans rectangulaires. Les équations de S sont

$$(S)\qquad \begin{cases} x = \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ y = \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \\ z = \int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1. \end{cases}$$

Et cette fois j'ai une *déformation continue* de la surface S par les

équations, où μ est une constante,

$$(S_1)\qquad \begin{cases} x = \mu \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \dfrac{1}{\mu} \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ y = \int \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \\ z = \int \sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\theta_1}{\mu}}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1. \end{cases}$$

J'ai constamment

$$(7)\qquad ds^2 = \mathcal{F}^2(\theta)\, d\theta^2 + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\, d\theta_1^2 + 2\cos\theta\cos\theta_1\, \mathcal{F}(\theta)\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta\, d\theta_1,$$

et les zéros de $\mathcal{F}(\theta)$ ou $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ donnent des arêtes de rebroussement persistant dans la déformation.

NOTE ADDITIVE.

Depuis l'envoi à l'impression de ce travail j'ai obtenu des couples en nombre illimité de surfaces réelles S et S_1 applicables l'une sur l'autre et telles :

1° Que ni l'une ni l'autre ne soient applicables sur une surface de révolution;

2° Qu'aucun point réel de l'une n'ait de correspondant réel sur l'autre.

Ce résultat complète ceux que j'ai donnés au paragraphe 4; j'ai obtenu ces exemples dans les trois classes de surfaces de translation signalées à la fin de ce travail; je publierai aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* une étude détaillée de ces surfaces. Je me contente d'indiquer ici un seul exemple. Soit la surface S unicursale

$$(S)\qquad \begin{cases} x = t^3 + 3mt^5 + t_1^3 + 3m_1 t_1^5, \\ y = (1 - t^2)^{\frac{3}{2}}(1 + 2m + 3mt^2), \\ z = (1 - t_1^2)^{\frac{3}{2}}(1 + 2m_1 + 3m_1 t_1^2). \end{cases}$$

Le ds^2 de cette surface est

$$ds^2 = 9t^2(1 + 5mt^2)^2 dt^2 + 9t_1^2(1 + 5m_1 t_1^2)^2 dt_1^2 \\ + 18t^2 t_1^2 (1 + 5mt^2)(1 + 5m_1 t_1^2)\, dt\, dt_1.$$

Soit μ un paramètre nouveau, qui est, soit réel, soit imaginaire pure. Toutes les surfaces

$$(S_1)\quad \begin{cases} X = \mu(t^3 + 3mt^5) + \dfrac{1}{\mu}(t_1^3 + 3m_1 t_1^5), \\ Y = (1 - \mu^2 t^2)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{\mu^2} + \dfrac{2m}{\mu^4} + \dfrac{3m}{\mu^2}t^2\right), \\ Z = \left(1 - \dfrac{t_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}(\mu^2 + 2m_1\mu^4 + 3m_1\mu^2 t_1^2) \end{cases}$$

ont même ds^2 que la surface S.

Pour μ réel, la surface S_1 est donc, quel que soit μ, applicable, point réel par point réel, sur la surface S, ou tout au moins sur une fraction convenable de S.

Mais si μ est imaginaire pure, pour t et t_1 réels, le point M de S est réel, le point correspondant M_1 de S_1 est imaginaire. Or dans ce cas, malgré l'apparence, S_1 est une surface *réelle* comme on le voit en donnant à t et t_1 des valeurs imaginaires pures, de sorte qu'alors M_1 est réel et M imaginaire.

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE M. PICARD;

PAR M. G. VALIRON.

Le théorème de M. Picard dont il sera question est la proposition classique relative aux valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé. Cette proposition démontrée par M. Picard en utilisant les propriétés de la fonction modulaire elliptique se ramène à la suivante :

I. *Si* $F(z)$ *est une fonction régulière et uniforme pour* $|z| > A$ *et admet le point à l'infini pour point singulier essentiel, elle prend une infinité de fois toute valeur, sauf une valeur au plus, dans le voisinage de ce point* [1].

[1] E. PICARD, *Mémoire sur les fonctions entières* (*Ann. École Normale*, 2e série, t. IX, 1880).

En 1896, M. Borel démontra d'une façon élémentaire un cas particulier du théorème I, puis dans son Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (¹) donna, dans le cas où $F(z)$ est une fonction entière, une proposition plus précise qui comprend le théorème I. La démonstration s'étend facilement au cas général, mais M. Borel ne donnait qu'une esquisse de certaines démonstrations, qui ne furent complétées qu'au prix de développements assez longs (²).

C'est M. Schottky qui donne la première démonstration élémentaire complète du théorème I, en le déduisant ainsi que le théorème de Picard-Landau du lemme suivant :

II. *Soit* $F(z)$ *une fonction régulière et différente de* 0 *et de* 1 *pour* $|z| < r$,

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \ldots;$$

soit γ *le plus petit des trois nombres*

$$|\log a_0|, \quad |\log(1 - a_0)|, \quad \left|\log \frac{a_0 - 1}{a_0}\right|$$

($\log u$ *désigne la valeur réduite du logarithme*). *Si l'on désigne par*

$$f(z) = \log F(z),$$

la fonction holomorphe pour $|z| < r$ *qui prend pour* $z = 0$ *la valeur* $\log F(0)$, *on a pour* $|z| < r$

$$(1) \qquad |\log F(z)| = |f(z)| < \frac{2^{24}}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{r}{r - |z|}\right)^4 \quad (^3).$$

Dans un second Mémoire (⁴), M. Schottky a montré que l'exposant 4 qui figure dans le second membre de la formule (1) peut être remplacé par 2. Si l'on serre de plus près les inégalités du premier Mémoire, on peut remplacer l'exposant 4 par $2 + \alpha$, α étant positif et arbitrairement petit. Il suffit par exemple dans la

(¹) *Acta mathematica*, t. XX, p. 357-396.

(²) *Voir* le livre de M. Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini.*

(³) Schottky, *Über den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen* (*Sitz. der Kg. Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1244).

(⁴) *Über zwei Beweise der allgemein Picard'schen Satz* (*Ibid.*, 1907, p. 823).

démonstration donnée par M. Goursat (Note à la fin du second volume de son *Traité d'Analyse*, 3e édition) de remplacer $\psi(\rho)$ par $\left(\frac{M}{\rho}\right)^2\left[\log\frac{M}{\rho}\right]^2$ (p. 658).

Lorsqu'on démontre le théorème II à l'aide des propriétés de la fonction modulaire $J(z)$ de Hurwitz, on obtient directement la valeur 2 pour l'exposant [1]. On peut même obtenir une inégalité de la forme

$$(2)\qquad |\log F(z)| < \chi(a_0)\frac{1}{r-|z|},$$

$\chi(a_0)$ ne dépendant que de a_0 [2].

Les auteurs qui se sont occupés du théorème de M. Picard et de ses généralisations n'ont pas donné d'application de l'inégalité (1) dans laquelle la valeur de l'exposant joue un rôle particulier. Je vais montrer dans ce qui suit que l'on peut obtenir en utilisant ces inégalités une démonstration que je crois inédite du théorème I et des propositions en partie nouvelles dans lesquelles la valeur de l'exposant joue un rôle fondamental.

En réalité, ce n'est pas l'inégalité (2) que j'utiliserai, mais une inégalité concernant la partie réelle de $\log F(z)$ qui est obtenue directement par M. Landau dans le Mémoire cité [formule (54)]. Je partirai donc de la proposition suivante :

III. *Soit* $F(z)$ *une fonction régulière et différente de* 0 *et de* 1 *pour* $|z| < r_0$

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots,$$

on a l'inégalité

$$(3)\qquad R[\log f(z)] < \chi(a_0)\frac{r_0}{r_0-|z|},$$

$\chi(a_0)$ *ne dépendant que de* a_0.

1. Je mettrai cette proposition sous une forme un peu différente, qui donne déjà une première extension d'un théorème de M. Picard. Je désignerai par $M(r)$ le maximum du module de $F(z)$ pour $|z| = r$, et j'aurai la proposition suivante :

---

(1) E. Landau, *Über den Picard'schen Satz* (*Viertel jahrschrift der naturf. Gesellschaft in Zurich*, 1906, p. 295).

(2) P. Lévy, *Remarques sur le théorème de M. Picard* (*Bull. Soc. math.*, 1912, p. 25).

IV. *Soit* $F(z)$ *une fonction régulière autour de l'origine, ayant un cercle de convergence égal à* r_0 *et telle que*

$$(4) \qquad \overline{\lim_{r=r_0}}\,(r_0 - r)\log M(r) = +\infty,$$

cette fonction prend une fois au moins toute valeur, sauf une au plus, à l'intérieur du cercle de convergence.

Car si l'on a

$$F(z) = b_0 + b_1 z + \ldots,$$

la fonction prend la valeur b_0, s'il existait deux valeurs α, β distinctes de b_0 que ne puisse prendre $F(z)$, la fonction

$$F_1(z) = \frac{F(z) - \alpha}{\beta - \alpha} = a_0 + a_1 z + \ldots$$

ne prendrait pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle $|z| < r_0$, on aurait

$$\log M_1(r) < \chi(a_0)\frac{r_0}{r_0 - r}, \quad M(r) < |\alpha| + |\beta - \alpha| M_1(r),$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité (4).

Le théorème IV étend à une classe de séries entières le premier théorème que M. Picard avait donné sur les fonctions entières ; les séries intéressées sont celles dont le maximum du module ne peut être majoré par une exponentielle de la forme $e^{\frac{A}{r_0 - r}}$. La considération de la fonction $e^{\frac{1}{z-1}}$ montre que cette condition ne peut être remplacée par une autre moins restrictive.

Mais c'est en passant au cas d'une fonction n'ayant qu'un seul point singulier sur le cercle de convergence que l'on obtient un résultat intéressant que j'énoncerai sous la forme suivante :

V. *Soit* $F(z)$ *une fonction de la variable* $z = re^{i\varphi}$, *régulière et uniforme dans le domaine* D *extérieur au cercle* C, $|z| = A$, *et intérieur à l'angle* Δ, $-\alpha \leqq \varphi \leqq +\alpha$. *Supposons que la fonction soit d'ordre supérieur à* $\frac{\pi}{2\alpha}$ *dans la portion* D′ *de* D *intérieure à un angle* Δ' *intérieur à* Δ ; *c'est-à-dire que le maximum* $M(r, -\alpha + \varepsilon, \alpha - \varepsilon)$ *du module de* $F(z)$ *pour* $|z| = r$

et $-\alpha+\varepsilon \leqq \varphi \leqq \alpha-\varepsilon$ *vérifie la condition*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_2 M(r, -\alpha+\varepsilon, \alpha-\varepsilon)}{\log r} \geqq \frac{\pi}{2(\alpha-\varepsilon)},$$

ε *étant un nombre positif fixe. Dans ces conditions*, $F(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, dans le domaine* D.

Supposons qu'il existe deux valeurs, que nous pouvons supposer être 0 et 1, que $F(z)$ ne prenne qu'un nombre fini de fois dans le domaine D; nous pouvons tracer un cercle C', $|z| = A'$, tel que $F(z)$ ne prenne plus les valeurs 0 et 1 dans la portion D_1 de D extérieure à C'. nous appellerons D'_1 la portion de D' intérieure à D_1.

Posons

$$Z = ue^{iv} = 2\left(\frac{A'}{z}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}},$$

le domaine D_1 donne le demi-cercle S de rayon 2, de centre origine, situé à droite de l'axe imaginaire, D'_1 donne le secteur S' de ce demi-cercle limité par les demi-droites $v = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)$. La transformée $F_1(Z)$ de $F(z)$ est régulière dans S et ne prend pas les valeurs 0 et 1, et le maximum $M_1(u)$ du module de $F_1(z)$ pour $|Z| = u$ et $|v| \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{\alpha}$ vérifie la condition

$$\overline{\lim_{u=0}} \frac{\log_2 M_1(u)}{\log \frac{1}{u}} \geqq \frac{\alpha}{\alpha-\varepsilon} > 1.$$

Posons alors

$$z_1 = Z - 1, \qquad F_1(Z) = F_2(z_1),$$

la fonction $F_2(z_1)$ est holomorphe dans le cercle $|z_1| = 1$ et ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans ce cercle. Posons $z_1 = r_1 e^{i\omega}$ et soit $M_2(r_1)$ le maximum de $F_2(z_1)$ pour $|z_1| = r_1$; lorsque r_1 est supérieur à $\cos\frac{\varepsilon}{\alpha}$, le cercle $|z_1| = r_1$ contient à son intérieur l'arc du cercle

$$|Z| = |z_1 + 1| = u, \qquad r_1^2 = 1 + u^2 - 2u\sin\frac{\varepsilon}{\alpha} \qquad \left(u < \sin\frac{\varepsilon}{\alpha}\right),$$

qui est intérieur à S'. On a donc

$$M_2(r_1) > M_1(u), \quad \frac{1-r_1}{u} = \frac{2\sin\frac{\varepsilon}{\alpha} - u}{1+r_1} > \frac{\sin\frac{\varepsilon}{\alpha}}{2}$$

et, par suite,

$$\overline{\lim_{r_1=1}} \frac{\log_2 M_2(r_1)}{\log \frac{1}{1-r_1}} > 1;$$

d'où, *a fortiori*,

$$\overline{\lim_{r_1=1}} (1-r_1) \log M_2(r_1) = +\infty,$$

ce qui est en contradiction avec le théorème IV, la proposition V est donc établie.

Ce théorème V montre que le théorème I de Picard est encore applicable aux fonctions admettant un point singulier essentiel, *isolé ou non,* dont on peut approcher à l'intérieur d'un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}$, à condition que le maximum du module de la fonction dans un angle intérieur soit d'ordre supérieur à ρ.

Inversement, si l'on suppose qu'une fonction $f(z)$ est régulière dans le voisinage de l'origine à l'intérieur d'un angle Δ d'ouverture α ayant pour sommet l'origine, et que cette fonction ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans ce domaine, c'est qu'elle est d'ordre au plus égal à $\frac{\pi}{\alpha}$ dans tout angle intérieur à Δ. On peut déduire de là des propriétés des zéros des fonctions $f(z) - a$ dans les angles Δ', de sommet origine, intérieurs à Δ. On ramènera, par une transformation $z = Z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, l'angle Δ à l'angle limité par l'axe imaginaire, et l'on considérera la portion du domaine transformé qui est intérieure à un cercle C tangent à l'origine à l'axe imaginaire. Dans ce cercle, la fonction transformée $F(Z')$ est exceptionnelle, donc son module est limité par le théorème de Landau ; le théorème de M. Jensen donnera alors une limite supérieure du nombre des zéros contenus dans un cercle concentrique à C, donc *a fortiori* du nombre des zéros contenus à la fois dans un tel cercle et dans un angle Δ'; pour ces zéros, le rapport entre la distance au cercle C et la distance à l'origine reste compris entre deux nombres fixes. On obtient ainsi le résultat suivant :

Si la fonction $f(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans l'angle Δ d'ouverture α ayant pour sommet l'origine, et est régulière à l'intérieur de cet angle au voisinage de l'origine, si l'on range les zéros de $f(z) - a$ contenus dans un angle

intérieur à Δ *dans l'ordre des modules décroissants, et si* a_n *est le module du* $n^{\text{ième}}$ *zéro, la série*

$$\sum a_n^{\frac{2\pi}{\alpha}}$$

est convergente.

Ce résultat ne semble pas entièrement satisfaisant, l'exposant doit pouvoir être divisé par 2. Dans le cas où le module de $f(z)$ est borné dans l'angle Δ, on trouve que la série $\sum a_n^{\frac{\pi}{\alpha}}$ converge, résultat beaucoup moins précis que celui obtenu par M. Montel [1].

Il est manifeste que le théorème V contient le théorème I de M. Picard. Considérons une fonction $f(z)$ régulière et uniforme pour $|z| > A$ et admettant le point à l'infini pour point essentiel. Posons encore $z = re^{i\varphi}$ et soit $M(r, \varphi_0, \varphi_1)$ le maximum $|f(z)|$ pour $|z| = r$ et $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$, $[M(r) = M(r, 0, 2\pi)]$; nous dirons que $f(z)$ est d'ordre ρ dans l'angle $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ si l'on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_2 M(r, \varphi_0, \varphi_1)}{\log r} = \rho$$

(ρ peut être infini) ; l'ordre de $f(z)$ sans autre spécification sera l'ordre dans tout le plan, donc l'ordre de $M(r)$.

Si $f(z)$ est d'ordre inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$, il ne peut y avoir de valeur exceptionnelle, car si $f(z)$ n'avait pas de zéros pour $r > A'$, on aurait

$$f(z) = P(z)\varphi(z)e^{g(z)},$$

$P(z)$ étant un polynome, $\varphi(z)$ étant régulière à l'infini, et $g(z)$ étant une fonction entière ; la condition relative à l'ordre entraîne, par application du théorème de M. Hadamard (complément de celui de Liouville), que $g(z)$ est une constante. Le point à l'infini ne serait donc pas un point essentiel.

Supposons alors que $f(z)$ soit d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$. Soit ρ_1

---

(1) P. Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Ann. École Normale*, t. XXXIII, 1916, p. 265). Le résultat de M. Montel se complète aisément ; comme la propriété ne fait pas intervenir la valeur de l'angle, elle est encore valable après une transformation $z = Z^k$, donc la série Σa_n^{ε} converge quel que soit ε.

un nombre inférieur à ρ et ρ_2 un entier supérieur à ρ. Partageons le plan (extérieur au cercle $|z| = A$) en domaines angulaires par les demi-droites $\varphi = \omega_0 + k\frac{\pi}{\rho_2}$ ($k = 0, 1, \ldots, 2\rho_2 - 1$). Quel que soit ρ_2, $f(z)$ sera d'ordre ρ dans l'un au moins, D_1, des domaines angulaires ainsi formés, on pourra appliquer le théorème V à tout domaine angulaire D d'ouverture $\frac{\pi}{\rho_1}$ contenant D_1 à son intérieur. On peut énoncer le résultat sous la forme suivante :

VI. *Si la fonction* $F(z)$ *est uniforme et régulière pour* $|z| > A$, *admet le point à l'infini pour point essentiel et est d'ordre* ρ *supérieur à* $\frac{1}{2}$, *dans tout son domaine angulaire d'ouverture* $\frac{\pi}{\rho_1}\left(\frac{1}{2} < \rho_1 < \rho\right)$ *contenant à son intérieur un domaine angulaire dans lequel* $F(z)$ *est d'ordre supérieur à* ρ_1, *la fonction prend une infinité de fois toute valeur, sauf une valeur exceptionnelle au plus.*

Pour les fonctions d'ordre fini ou nul, ce résultat est moins précis que celui qui découle du théorème général de M. Julia [1], mais il n'est pas sans intérêt, car il fournit explicitement des angles dans lesquels la propriété a lieu. Ainsi, si $F(z)$ est une fonction entière à coefficients positifs, d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$, les angles d'ouverture $\frac{\pi}{\rho_1}$ $(\rho_1 < \rho)$ contenant à leur intérieur l'axe réel positif renferment une infinité de zéros des fonctions $F(z) - a$, sauf peut-être pour une valeur de a.

L'exemple des fonctions de la forme $e^{g(z)}$, où $g(z)$ est un polynome, et plus généralement des fonctions de la forme $f(z)\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, où $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ est régulière à l'infini et $f(z)$ une fonction entière orientée d'ordre non entier à zéros très réguliers [2], montre que dans le théorème VI l'ouverture de l'angle ne peut être diminuée, c'est-à-dire que la proposition n'est pas nécessairement vraie dans un

---

(1) G. Julia, *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (*Ann. École Normale*, 3e série, t. XXXVI, p. 93).

(2) G. Valiron, *Thèse*, p. 114.

angle d'ouverture α à l'intérieur duquel la fonction serait d'ordre moindre que $\frac{\pi}{\alpha}$. La seconde sorte d'exemple montre en outre que le cas d'exception peut se produire alors même qu'il n'existe pas de valeur exceptionnelle au sens du théorème I.

Étant donnée la fonction $f(z)$ d'ordre fini ρ, le théorème VI montre qu'il existe un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}+\varepsilon$ dans lequel la fonction est d'ordre ρ et à l'intérieur duquel toute fonction $f(z)-a$ (sauf une au plus) a une infinité de zéros. On peut chercher à obtenir des renseignements plus précis sur la suite des modules de ces zéros, il semble bien que l'ordre de cette suite est aussi égal à ρ, mais je n'ai pu obtenir jusqu'ici que des propositions moins précises. Dans le cas de l'ordre infini, on aurait une propriété analogue que l'on peut démontrer dans le cas où la croissance est suffisamment rapide. Il est d'autre part bien facile de trouver des fonctions entières d'ordre ρ telles que toute fonction $f(z)-a$ (sauf une) admette une infinité de zéros dans un angle d'ouverture donnée, l'ordre de la suite de ces zéros étant un nombre donné moindre que ρ. Ces remarques montrent que le théorème VI et le théorème de M. Julia sont peut-être de nature plus différente que l'on pourrait le croire tout d'abord.

2. On peut étendre ces résultats au moyen de représentations conformes convenables.

Considérons une courbe continue C s'éloignant indéfiniment de l'origine, c'est-à-dire coupant en un seul point tout cercle $|z|=r$ $(r>A)$. Désignons par C_θ la courbe obtenue en faisant tourner la courbe C de l'angle θ dans le sens direct autour de l'origine, par $D(\theta_1,\theta_2)$ le domaine balayé par C_θ lorsque θ varie de θ_1 à θ_2 $(\theta_2-\theta_1<2\pi)$ et par $M(r,\theta_1,\theta_2)$ le maximum du module de $f(z)$ sur l'arc du cercle $|z|=r$ compris à l'intérieur (au sens large) de $D(\theta_1,\theta_2)$. On peut essayer d'étendre les théorèmes V et VI à de tels domaines. Si une proposition de l'espèce V a lieu dans un domaine $D(\theta_1,\theta_2)$ lorsque $M(r,\theta_1,\theta_2)$ satisfait à une certaine condition de croissance, le théorème VI aura lieu pour les fonctions telles que $M(r)$ vérifie cette même condition, car on pourra partager le plan en domaines $D(\theta_i,\theta_{i+1})$ avec $\theta_i=\frac{2i}{n}\pi$ et, dans l'un au

moins de ces domaines, $M(r, \theta_i, \theta_{i+1})$ vérifiera encore la condition considérée.

Pour étendre le théorème V au cas d'un domaine $D(\theta_1, \theta_2)$, on peut essayer de faire une représentation conforme $Z = H(z)$ de ce domaine sur un domaine angulaire compris entre deux demi-droites passant par l'origine et extérieur à un cercle ayant pour centre l'origine, chercher ce que devient le domaine $D(\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$ et étudier la relation entre $r = |z|$ et $R = |Z|$. Cette étude est facile dans le cas où C est une spirale logarithmique, la transformation $Z = z^{\alpha + i\beta}$, où α et β sont convenablement choisis, résout la question, et l'on obtient le résultat suivant :

VII. *Si la fonction* $F(z)$ *est d'ordre supérieur à* ρ *dans le domaine* D *compris entre les deux spirales*

$$\log r = k\varphi, \qquad \log r = k\left[\varphi + \frac{\pi}{\rho}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\right]$$

et extérieur au cercle $|z| = A$, *elle prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, dans tout domaine limité par des spirales logarithmiques et comprenant* D *à son intérieur* (au sens étroit).

Ainsi une fonction entière d'ordre infini, à coefficients positifs, prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, entre deux spirales logarithmiques égales quelconques.

En général, un domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ est bien applicable sur un domaine angulaire, mais l'étude de la transformation conforme au point de vue qui nous intéresse n'a pas été faite. Nous nous bornerons à considérer des cas particuliers, et nous ne chercherons pas à faire la représentation conforme du domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ sur un domaine angulaire, nous chercherons une transformation conforme du domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ dans laquelle les courbes C_θ donnent des courbes allant à l'infini sur lesquelles l'argument de Z tende vers une limite dépendant linéairement de θ. Alors $\Delta(\theta_1, \theta_2)$ et $\Delta(\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$ étant les transformés de $D(\theta_1, \theta_2)$ et $D(\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$, on pourra trouver un domaine angulaire Δ intérieur à $\Delta(\theta_1, \theta_2)$, un domaine angulaire Δ' contenant $\Delta(\theta_1 + \varepsilon, \theta_2 - \varepsilon)$ à son intérieur, Δ' étant en outre intérieur à Δ ; le théorème V s'appliquera donc à la condition que l'ordre à l'intérieur de Δ' soit

suffisamment élevé, ce qui donnera une limitation inférieure de l'ordre dans $D(\theta_1+\varepsilon, \theta_2-\varepsilon)$, en utilisant la relation entre r et R.

Considérons d'abord les spirales C_θ d'équations

$$(5) \qquad \log r = k(\varphi+\theta)^p.$$

Dans le domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ balayé par ces courbes lorsque θ varie de θ_1 à θ_2, on a

$$\log z = k(\varphi+\theta)^p + i\varphi,$$

φ étant bien déterminé par l'égalité (5) pour chaque valeur de r, $\log z$ est donc uniforme dans ce domaine. Supposons $p > 1$, nous poserons

$$(6) \qquad \log Z = \log z - i\left(\frac{\log z}{k}\right)^{\frac{1}{p}} + iA_2\left(\frac{\log z}{k}\right)^{\frac{3-2p}{p}} + \ldots$$
$$+ iA_q\left(\frac{\log z}{k}\right)^{\frac{1+2q(1-p)}{p}},$$

q étant le plus grand entier inférieur à $\frac{1}{2(p-1)}$. On voit de suite que pour $p \geqq \frac{3}{2}$ la partie imaginaire de $\log Z$ est

$$-i\theta + \varepsilon(\varphi),$$

$\varepsilon(\varphi)$ tendant vers zéro lorsque φ croît indéfiniment; pour $p < \frac{3}{2}$ on peut déterminer les coefficients $A_2, A_3, \ldots, A_q$, de proche en proche, pour que cette circonstance se produise encore; on a

$$A_2 = \frac{p-1}{2p^2}\,\frac{1}{k^2}, \quad \ldots.$$

L'égalité (6) montre en outre que les courbes transformées des spirales C_θ sont des courbes simples pour $\varphi > \varphi_0$ (φ_0 est indépendant de θ) sur lesquelles le module R de Z est croissant et l'argument monotone; en outre, ces courbes simples ne se coupent pas; la transformation (6) donne donc une représentation conforme du domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ sur le domaine $\Delta(\theta_1, \theta_2)$ compris entre les courbes transformées de C_{θ_1} et C_{θ_2} et du cercle $\log r = k\varphi_0^p$. Cette transformation satisfait aux conditions énoncées plus haut, l'ouverture du domaine est conservée, on a d'autre part

$$R = r^{1+\varepsilon_1(\varphi)},$$

$\varepsilon_1(\varphi)$ tendant vers zéro lorsque φ croît indéfiniment, l'ordre est donc aussi conservé.

On peut ainsi utiliser les spirales (5) *avec* $p > 1$ *au lieu de droites pour limiter les domaines angulaires figurant dans les énoncés* V et VI.

Supposons maintenant $p < 1$, nous poserons

$$\log Z = \left(\frac{\log z}{i}\right)^{2-p} \frac{1}{(2-p)kp} + \frac{1}{p}\log z + iB_2\left(\frac{\log z}{i}\right)^{2p-1} + \ldots$$
$$+ iB_q\left(\frac{\log z}{i}\right)^{2q(p-1)+1},$$

le nombre q étant le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{2(1-p)}$; les coefficients $B_2, B_3, \ldots, B_q$ pourront encore être déterminés de proche en proche pour que la partie imaginaire $\log z$ soit de la forme

$$-i\theta + \varepsilon(\varphi).$$

Les courbes transformées des spirales seront des courbes simples pour $\varphi > \varphi_0$, sur lesquelles le module et l'argument sont des fonctions monotones de φ, la relation (7) donne la représentation conforme de $D(\theta_1, \theta_2)$ sur un domaine $\Delta(\theta_1, \theta_2)$, l'ouverture du domaine est conservée, mais l'ordre ne l'est plus, on a

$$\log R = \frac{1+\varepsilon_1(r)}{(2-p)kp}\left(\frac{\log r}{k}\right)^{\frac{2-p}{p}},$$

les propositions de l'espèce V ou VI relatives au domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ ne s'appliqueront qu'à des fonctions d'ordre infini suffisamment croissantes. On obtiendra par exemple la proposition suivante :

VIII. *Si* $F(z)$ *est uniforme et régulière dans le domaine* $D(\theta_1, \theta_2)$ *limité par les spirales*

$$\log r = k(\varphi+\theta_1)^p, \qquad \log r = k(\varphi+\theta_2)^p \qquad (p<1, \qquad \theta_2-\theta_1<2\pi)$$

et par le cercle $|z| = A$, *et si dans le domaine intérieur* $D(\theta_1+\varepsilon, \theta_2-\varepsilon)$ *le maximum du module* $M(r, \theta_1+\varepsilon, \theta_2-\varepsilon)$ vérifie la *condition*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_3 M(r, \theta_1+\varepsilon, \theta_2-\varepsilon)}{\log_2 r} > \frac{2-p}{p},$$

la fonction prend une infinité de fois toute valeur dans le domaine $D(\theta_1, \theta_2)$, *sauf une valeur au plus.*

Les domaines $D(\theta_1, \theta_2)$ considérés ici déterminent sur une droite passant par l'origine des segments dont le rapport de la longueur à la distance à l'origine tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment.

Prenons encore les spirales d'Archimède

$$r = a(\varphi + \theta)$$

et le domaine $D(\theta_1, \theta_2)$ compris entre deux de ces courbes et extérieur au cercle $|z| = A$. Si l'on fait la transformation

$$\log Z = -\frac{1}{2}(\log z)^2 + \log z \times \log\left[\frac{a}{i}\log z\right],$$

on obtiendra encore comme transformées des spirales des courbes simples s'éloignant indéfiniment, sur lesquelles l'argument est monotone et tend vers $-i\theta$, cette transformation conforme conserve l'ouverture du domaine et donne d'autre part

$$\log R = [1 + \varepsilon(\varphi)]r^2,$$

une fonction d'ordre fini dans le plan des Z est transformée en une fonction telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log_3 M(r)}{\log r} \leqq 2;$$

d'où par exemple le résultat :

IX. *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme et régulière pour* $|z| > A$, *telle que l'on ait*

$$\log_2 M(r) > r^\alpha \qquad (\alpha > 2),$$

pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r. *Quel que soit* a *et si petit que soit* ε, *il existe des spirales d'Archimède*

$$r = a(\varphi + \theta), \qquad r = a(\varphi + \theta + \varepsilon),$$

entre lesquelles $F(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf une valeur exceptionnelle au plus.*

On pourra multiplier ces exemples ; à chaque famille de spirales

correspondra une famille de fonctions dont l'ordre sera limité inférieurement pour lesquelles on aura des propositions analogues à V et VI. Dans les propositions de l'espèce V les conditions relatives à l'ordre sont indispensables, on le voit en transformant les exemples cités plus haut. Dans le cas des fonctions admettant le point à l'infini pour point essentiel isolé, on peut se demander si la condition relative à l'ordre ne peut pas être supprimée, en se bornant naturellement à énoncer l'existence de domaines $D(\theta_1, \theta_2)$ dans lesquels la propriété à lieu, ces domaines ne correspondant plus nécessairement aux grandes valeurs de $M(r, \theta_1, \theta_2)$. Il n'y a lieu d'examiner la question que dans le cas où la spirale coupe les cercles de centre origine sous un angle qui tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment, et il s'agit de savoir en somme si le théorème de M. Julia s'étend à des domaines limités par de telles spirales. L'exemple de la fonction

$$F(z) = \sin z$$

montre que le théorème IX n'est pas valable pour toutes les fonctions entières ; entre deux spirales

$$r = \frac{1}{2}(\varphi + \theta), \qquad r = \frac{1}{2}(\varphi + \theta) + \varepsilon \quad (\varepsilon < \pi),$$

quel que soit θ, il y a une infinité de valeurs exceptionnelles.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VEBLEN (O.) and YOUNG (J. W.). — PROJECTIVE GEOMETRY [Géométrie projective]; vol. II, par OSWALD VEBLEN. — Un vol. in-8°, XII-541 pages, avec 88 fig. Ginn and C°, Boston, ..., 1918.

En 1911, le *Bulletin* a signalé l'apparition du premier Tome de la *Géométrie projective* de MM. Veblen et Young (1). Le Tome II, rédigé exclusivement par M. Veblen, apporte une contribution magistrale à l'étude des principaux problèmes de la Géométrie moderne.

Aussi bien, la brièveté du titre ne doit-elle pas nous induire en erreur : loin de se limiter à la Géométrie projective, les Auteurs abordent l'examen des diverses doctrines auxquelles sont associés les noms d'Euclide, de Descartes, de Lobatchewski, de Riemann, de Poincaré : partant d'axiomes en nombre aussi restreint que possible, ils établissent successivement les principaux résultats de la Géométrie projective, puis, par spécialisation progressive, ceux des diverses Géométries métriques, et terminent, enfin, par les éléments de la Géométrie de situation. Indiquons rapidement leur méthode.

Dans toute proposition de Géométrie, il y a lieu d'envisager le type d'espace où elle est valable, et la nature du groupe qu'elle admet : à l'intérieur d'un espace donné, l'ensemble des définitions et des théorèmes, qui expriment des propriétés invariantes pour un groupe donné, constitue une Géométrie. D'ailleurs, pour qu'un *espace* puisse être considéré comme donné, il faut avoir relié ses éléments (points, droites, plans) par des systèmes d'*axiomes* à la fois compatibles, indépendants et bien déterminés; quant à la définition et à la classification des *groupes* de coordonnées, elles relèvent de l'*Analyse*. Etablir par cette méthode la Géométrie projective, tel est précisément l'objet du Tome I, que nous rappellerons rapidement.

(1) *Bull. Sc. math.*, t. XXXV, 1911, p. 40-42.

A la base de la Géométrie projective se trouvent deux notions premières que l'on ne cherche pas à définir : celles de point et de ligne droite. Ces êtres géométriques satisfont à deux séries d'axiomes : les axiomes de l'alignement (A) et ceux de l'étendue (« extension ») (E). Les premiers apprennent, notamment, que par deux points passe une droite et une seule; les seconds expriment d'une manière précise que l'espace est triplement infini; ils peuvent d'ailleurs se généraliser pour un espace à n dimensions. Ces axiomes posés, on peut établir immédiatement les propriétés de la configuration de Desargues, et des correspondances perspectives et projectives; pourtant, si l'on veut être sûr que les suites harmoniques sur une droite ne se composent pas, exclusivement, de trois points, il faut introduire un axiome supplémentaire (H_0), en vertu duquel les points de concours des diagonales d'un quadrilatère complet ne sont pas en ligne droite. La théorie des constructions harmoniques dans un espace projectif *général* prend alors un sens, et l'on peut établir le théorème fondamental de la Géométrie projective d'après lequel les correspondances projectives entre A, B, C, D et A′, B′, C′, D′, d'une part, et entre A, B, C, D et A′, B′, C′, D'_1, d'autre part, entraînent l'identité de D′ et D'_1. Toutefois, dans cette démonstration, un nouvel axiome est encore nécessaire : l'axiome de projectivité (P), en vertu duquel toute projectivité qui laisse invariants trois points distincts d'une droite laisse invariant tout point de la droite. Ainsi se trouve défini l'espace projectif *propre*.

Les Auteurs avertissent d'ailleurs qu'on pourrait se passer du nouvel axiome, en le remplaçant par les axiomes d'ordre (S), et de continuité (C), qui seront exposés au Tome II; mais le détour est long, et sans application en Géométrie projective. D'ailleurs, le théorème fondamental s'applique dans des cas où (S) et (C) cessent d'être valables.

Ce théorème une fois établi, on peut introduire la notion de coordonnées sans faire intervenir celle de distance : c'est là un résultat des plus importants, puisqu'il permet l'application des méthodes de l'Analyse; l'existence et les propriétés du groupe projectif en résultent aussitôt. Le Tome I se termine par l'exposé des propriétés les plus simples des coniques, des quadriques et des complexes linéaires.

Le lecteur qui aborde le Tome II ne connaît donc que les types très généraux d'espace projectif et de groupe projectif; or la catégorie des espaces projectifs est très étendue; et leurs propriétés seront très différentes suivant la nature des hypothèses supplémentaires qu'on introduira pour achever de les définir. Par exemple, admettons l'axiome (K) [ou (J)], qui implique l'existence de l'ensemble de tous les points dont les coordonnées appartiennent au champ réel (ou complexe) total : l'espace sur lequel on raisonnera sera l'espace projectif réel (ou complexe); on peut d'ailleurs remplacer ces axiomes par d'autres systèmes de postulats, qui évitent l'intervention de la théorie de Dedekind. Au point de vue des applications, les espaces qu'on vient de citer sont les plus importants; mais on peut aussi fonder d'autres géométries dans des espaces d'un caractère complètement différent : tels sont, par exemple, ces espaces modulaires dans lesquels une suite harmonique quelconque ne comprend qu'un nombre fini de points [axiome $(\overline{H})$] et sur lesquels l'Auteur donne de rapides indications.

Plaçons-nous maintenant dans l'espace projectif réel, et envisageons les transformations projectives (réelles) d'une droite de cet espace en elle-même; la distinction entre les deux signes possibles du déterminant de la transformation permet de définir deux sens sur la droite (Chap. III); cette distinction est donc isomorphe à celle qui sépare les nombres positifs et les nombres négatifs; elle permet d'introduire les notions de segment et d'intervalle. La notion du sens s'étend d'ailleurs à l'espace projectif à trois dimensions, mais non au plan projectif : M. Veblen établit, avec tous les développements nécessaires, qu'un tel plan est une surface unilatérale.

Pour parler de sens sur un plan, il faut donc modifier le plan projectif : par exemple, on pourra le transformer en un plan euclidien moyennant la suppression de la droite à l'infini, l_∞. Ainsi introduite, la notion de plan euclidien exige l'acquisition préalable d'un grand nombre de notions préliminaires. Pourrait-on y accéder plus directement? Dans un Mémoire souvent cité [1],

[1] *Transactions of the American Mathematical Society*, t. V, 1904.

M. Veblen a montré qu'on peut répondre affirmativement tout en s'appuyant uniquement sur des relations d'ordre; à la base de son système d'axiomes figurent deux notions primitives : celle de point et celle d'une relation entre trois points A, B, C, exprimée par la locution « les points sont dans l'ordre { A B C } ». Il devient alors possible de définir les notions de segment, d'intervalle, de rayon et de ligne droite : par exemple, la droite AB est l'ensemble des points A, B, et de tous les points X dans l'un des ordres { A B X }, { A X B }, { X A B }. L'équivalence entre ces deux voies si différentes pour parvenir à la notion de plan euclidien a déjà soulevé d'intéressantes recherches.

A l'espace euclidien correspond un sous-groupe projectif particulièrement important : le sous-groupe des transformations affines qui conservent la droite l_∞, (Chap. III).

La Géométrie qui est rattachée à ce sous-groupe occupe, en quelque sorte, une place intermédiaire entre la Géométrie projective et la Géométrie euclidienne. C'est à cette Géométrie « affine » qu'appartiennent la théorie des translations et les débuts de la théorie des vecteurs, la théorie des homothéties, des transversales et des réflexions, la distinction entre les trois genres de coniques et la mesure des triades de points orientées, première ébauche de la théorie des aires.

Toutefois, si l'on veut retrouver complètement la Géométrie euclidienne classique, une nouvelle étape est encore nécessaire : suivant notre locution antérieure, il faut introduire un nouveau groupe de transformations, sous-groupe nécessairement non invariant du groupe affine; ce sera le groupe des transformations (affines) qui laissent invariante une certaine involution fondamentale, I, fixée (arbitrairement, d'ailleurs) sur l_∞. A ce sous-groupe, qu'on pourra appeler *groupe euclidien*, se rattache aussitôt la notion de congruence, que l'étude des translations et des symétries laissait déjà entrevoir. Cette notion acquise, il devient aisé d'établir les différentes théories des déplacements, des similitudes, de l'égalité des triangles, du cercle, de la mesure des angles et des aires : bref, c'est toute la Géométrie classique qui se trouve condensée en quelques pages (Chap. IV), et prolongée par un exposé des propriétés métriques des coniques (Chap. V). Nous n'insisterons pas sur un enchaînement de propositions familier au

lecteur français; observons seulement que M. Veblen a complété son système d'axiomes, précédemment indiqué pour la Géométrie affine, de façon que le nouveau système puisse constituer une base autonome pour la Géométrie euclidienne.

Un procédé analogue s'applique à l'espace à trois dimensions; cette généralisation fait l'objet du Chapitre VII; elle contient, notamment, une étude approfondie des déplacements, de leur représentation analytique et des quaternions.

Insistons davantage sur le Chapitre VI, véritable trait d'union entre les théories les plus diverses de la Géométrie et de l'Analyse. Le procédé de l'Auteur n'est d'ailleurs que la mise en œuvre systématique du principe de transposition que nous résumerons de la façon suivante : à deux groupes de transformations holoédriquement isomorphes, correspondent deux Géométries identiques (à la terminologie près). Ceci rappelé, partons de la notion de vecteur, établie au Chapitre III, et définissons la multiplication vectorielle : nous en déduirons, comme le fait l'Auteur, la représentation vectorielle des quantités complexes et, par suite, une correspondance bien définie entre le plan euclidien réel et la droite, envisagée comme lieu de points réels et imaginaires. Les transformations projectives, T, de la droite en elle-même se traduisent en transformations circulaires du plan, et l'on a défini ainsi, dans le plan euclidien réel, un groupe de transformations comprenant l'inversion et les déplacements. Mais les transformations T forment un groupe, holoédriquement isomorphe à celui des transformations d'une quadrique en elle-même (chaque système de génératrices restant invariant); à un autre point de vue, l'emploi des coordonnées tétracycliques permet encore d'établir que la Géométrie projective, sur une quadrique réelle, est équivalente à la Géométrie projective sur une droite complexe. Ces résultats entraînent d'intéressantes conséquences d'*Analysis situs* : ainsi le plan projectif complexe correspond biunivoquement aux couples de points (non ordonnés) d'une quadrique convexe, tandis que le plan analytique est équivalent à une quadrique réglée. La théorie précédente permet encore l'étude systématique des transformations projectives d'une quadrique en elle-même; à cet égard, citons les diverses extensions du théorème de Pascal

aux quadriques, ainsi que la répartition en deux classes des droites imaginaires de l'espace.

Revenons maintenant au plan projectif, et considérons le groupe de toutes les transformations projectives qui conservent non plus une certaine involution appartenant à l_∞, mais une conique réelle ou imaginaire du plan; la Géométrie correspondante sera non plus la Géométrie euclidienne, mais la Géométrie hyperbolique ou elliptique; et un procédé analogue s'applique à l'espace. L'exposé des résultats essentiels de ces Géométries (congruence, mesure des angles, représentation analytique des déplacements...) forme l'objet du Chapitre VIII; l'élégance des démonstrations fait regretter davantage que l'Auteur n'ait pas cru insister plus longuement sur les nouvelles Géométries.

Par son sujet, par son étendue (p. 385-500), le Chapitre IX qui termine l'Ouvrage mérite une mention toute spéciale : consacré à l'exposition des notions de « sens » et de « séparation », c'est, en réalité, une excellente introduction à l'*Analysis situs*. On peut le subdiviser en trois parties distinctes qui développent successivement les notions de convexité, d'orientation et de divisions en régions.

La définition de région convexe s'énonce d'une façon analogue, quel que soit le nombre des dimensions de l'espace auquel appartient la région; ainsi, dans le plan, un ensemble de points formera une région convexe dans le cas (et dans le cas seulement) où il remplira simultanément les conditions suivantes :

1° Deux points quelconques de l'ensemble doivent pouvoir être reliés par un intervalle composé entièrement de points de l'ensemble;

2° Tout point de l'ensemble appartient à une région triangulaire dont tous les points appartiennent à l'ensemble;

3° Il existe au moins une droite du plan ne contenant aucun point de l'ensemble.

L'Auteur complète l'étude de ces régions par différents résultats sur leurs frontières et sur les courbes (au sens de M. Jordan); il

montre notamment que la droite du plan projectif et la conique sont des courbes simples fermées.

Considérons dans un espace S_3 un tétraèdre ABCD et, à l'un des points, D, par exemple, substituons un point D′ tel que le segment DD′ ne rencontre pas le plan ABC. Une telle opération constitue ce que M. Veblen appelle *une transformation élémentaire;* elle s'étend aisément au cas d'un espace à un nombre quelconque de dimensions (projectif ou euclidien); elle joue un rôle capital dans l'étude des problèmes de disposition et de sens. C'est ainsi, qu'appliquées aux opérations projectives, les transformations élémentaires permettent de préciser la notion d'orientation dans les chapitres les plus divers de la Géométrie projective, et notamment dans la théorie des congruences et des complexes linéaires. Les résultats obtenus peuvent d'ailleurs s'étendre aux opérations analytiques générales, du moins si l'on se borne aux théorèmes « à une dimension »; mais, si l'on sort de ce cadre, la généralisation de la théorie précédente exigerait la démonstration préalable du théorème de M. Jordan sur les contours continus simples fermés : cette démonstration, l'Auteur ne la donne que dans le cas des polygones, dont l'étude remplira les dernières pages du Traité.

Dans son Analyse, le rôle fondamental est joué par une notion de matrice auxiliaire, introduite par H. Poincaré. Considérons, dans le plan projectif, par exemple, le système formé par n droites, leurs intersections a^0, les segments a^1 déterminés par ces intersections, et les régions convexes a^2 limitées par les droites. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ les nombres de ces éléments, nombres qui satisfont d'ailleurs à la relation $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$; formons une matrice H_1 de α_0 lignes et de α_1 colonnes, telle que l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne soit égal à 1 ou à 0 suivant que a_i^0 est, ou non, une extrémité de a_j^1. Cela étant, la considération de cette matrice et d'autres analogues permet à l'Auteur d'établir d'importants résultats, entre autres la division des polygones du plan projectif en deux classes : les polygones impairs et les polygones pairs. Les premiers (comme, par exemple, la droite projective) ne détruisent pas la connexion du plan; les autres le subdivisent en deux régions. Combinée avec le concept d'orientation, la théorie de ces matrices fournit le premier exemple des coefficients de torsion de H. Poincaré.

Par ce rapide aperçu on aura pu pressentir la variété des problèmes abordés, la rigueur des développements et l'importance des résultats établis. A ces qualités essentielles, le Traité joint tous les avantages d'une forme attrayante; rédigé dans un style clair et précis, complété par un choix très étendu d' « exercices » — dont quelques-uns, d'un niveau élevé, sont empruntés à de récents Mémoires —, l'Ouvrage de MM. Veblen et Young sera pour l'étudiant français le plus sûr des initiateurs.

René Garnier.

MÉLANGES.

LES FONCTIONS ENTIÈRES DE DEUX VARIABLES ET LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE;

Par M. G. VALIRON.

Dans un Mémoire *Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables* (1), M. Sire a démontré la proposition suivante : « $F(x, y)$ étant une fonction entière de x et y dont les coefficients satisfont à certaines conditions, cette fonction considérée comme fonction de x est à croissance régulière quel que soit y, sauf pour certains points appartenant à un ensemble ponctuel. Un ensemble ponctuel est un ensemble dont les points peuvent être enfermés dans une infinité dénombrable de cercles dont la somme des rayons est arbitrairement petite. »

Dans cet énoncé, il s'agit de la croissance régulière au sens de M. Borel; mais si l'on impose à la croissance de la fonction des conditions plus serrées, on trouve encore dans certains cas un résultat analogue : les valeurs de y, pour lesquelles les conditions

(1) *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IX, p. 1-37.

de régularité ne sont plus vérifiées, forment encore un ensemble ponctuel. De même si l'on cherche simplement les valeurs de y pour lesquelles l'ordre de la fonction est constant, on trouve que les valeurs exceptionnelles peuvent former un ensemble ponctuel (¹). Il y a donc lieu de chercher à distinguer ces ensembles au moyen de la classification proposée par M. Borel pour les ensembles réguliers de mesure nulle (²).

Je vais montrer dans ce qui suit que l'on peut conduire les démonstrations de façon à introduire directement des ensembles réguliers de mesure nulle renfermant tous les points exceptionnels; pour classer ces ensembles on est amené à modifier légèrement la définition de l'ordre asymptotique donnée par M. Borel, les aires d'exclusion entourant les points fondamentaux se groupant naturellement d'une façon déterminée. Je me bornerai d'ailleurs à indiquer la marche à suivre et à donner deux exemples de la forme que prennent les énoncés dans le cas des croissances régulières, on obtiendra facilement des énoncés semblables (³).

1. Nous poserons

$$(1)\quad F(x, y) = \sum_{0}^{\infty} a_n(y) x^n, \qquad a_n(y) = \sum_{p=0}^{p=\infty} c_{n,p} y^p, \qquad g_{n,p} = |c_{n,p}|$$

et nous ferons les hypothèses suivantes :

1° *L'ordre apparent total est fini*, c'est-à-dire que l'on a

$$(2)\qquad \varliminf_{n+p=\infty} \frac{-\log g_{n,p}}{(n+p)\log(n+p)} = \frac{1}{\lambda} \qquad (\lambda \text{ fini});$$

2° Si l'on désigne par g_n le plus grand des nombres

$$g_{n,p} \quad (p = 0, 1, \ldots).$$

(¹) Sire, *Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini* (*Thèse*, Paris, 1910).

(²) E. Borel, *Sur les ensembles de mesure nulle* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. XLI, 1913, p. 1-19); *Leçons sur les fonctions monogènes*, Chap. IV (Paris, Gauthier-Villars, 1916).

Un nouveau Mémoire de M. Borel sur cette question doit paraître prochainement.

(³) La notion d'ensemble régulier s'introduit aussi dans l'étude des fonctions entières d'une variable d'ordre entier: *voir* ma Note *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1920).

il existe un nombre $\alpha < \lambda$ tel que l'on a, pour $r > r_0$,

$$(3) \qquad f(r) = \Sigma g_n r^n > e^{r^\alpha}.$$

Nous nous proposons de comparer le maximum $M(r, y)$ du module de $F(x, y)$ pour $|x| = r$, à la fonction $f(r)$ définie ci-dessus, et cela pour les valeurs de y intérieures au cercle

$$|y| = R \qquad (R > 1).$$

Nous prendrons pour point de départ un résultat de M. Sire dont je donnerai rapidement la démonstration, afin de ne faire appel qu'aux propriétés des fonctions entières d'une seule variable. Il s'agit de montrer que l'on peut se borner au cas où les fonctions entières $a_n(y)$ seraient remplacées par des polynomes dont le degré serait de l'ordre de n.

Soit α_1 un nombre inférieur à α, la condition (3) entraîne l'existence d'une suite infinie de nombres n pour lesquels on a

$$(4) \qquad A_n(R) = \sum_p g_{n,p} R^p > n^{-\frac{n}{\alpha_1}},$$

car si cette inégalité n'était plus vérifiée à partir d'une valeur de n, la fonction entière $\Sigma A_n(R) r^n$ et *a fortiori* $f(r)$ serait d'ordre α_1 au plus [1]. Soit $n_1, n_2, \ldots, n_q, \ldots$ la suite des nombres vérifiant l'inégalité (4); pour les nombres n n'appartenant pas à cette suite, le module de $a_n(y)$ est inférieur ou égal au troisième membre de l'inégalité (4), on peut donc écrire

$$F(x, y) = \sum_{q=1}^{q=\infty} a_{n_q}(y) x^{n_q} + F_1(x, y),$$

$F_1(x, y)$ étant d'ordre α_1 au plus en x pour $|y| < R$. On a d'autre part

$$a_{n_q}(y) = S_{kn_q}(y) + R_{kn_q}(y),$$

$S_{kn_q}(y)$ désignant la somme des kn_q premiers termes de la fonction entière $a_{n_q}(y)$ et $R_{kn_q}(y)$ le reste. Si l'on désigne par λ_1 un nombre

---

[1] Pour les propriétés des fonctions d'une variable qui seront utilisées, *voir* le Mémoire de M. Lindelöf, *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor* (ce *Bulletin*, t. XXVII, 1903) ou ma *Thèse*, p. 62-66.

supérieur au nombre λ qui figure dans l'égalité (2), on aura, à partir d'une valeur N_0 de n_q,

$$|R_{kn_q}(y)| < \sum_p g_{n_q,p} R^p < \sum (n_q + p)^{-\frac{1}{\lambda_1}(n_q+p)} R^p$$
$$< A'[(1+k)n_q]^{-\frac{1}{\lambda_1}(1+k)} R^{kn_q},$$

A étant un nombre fixe. On pourra prendre k pour que $\frac{1+k}{\lambda_1}$ soit supérieur à α_1, et l'on aura, pour $n = n_q > N_1$,

$$(5) \qquad |R_{kn}(y)| < \sum_{kn+1}^{\infty} g_{n,p} R^p < \frac{1}{kn} n^{-\frac{n}{\alpha_1}},$$

ce qui montre que l'on peut écrire

$$F(x, y) = \sum_{q=1}^{q=\infty} S_{kn_q}(y) x^{n_q} + F_2(x, y),$$

$F_2(x, y)$ étant d'ordre α_1 au plus en x, et $S_{kn_q}(y)$ étant un polynome de degré kn_q au plus. D'autre part, la comparaison des inégalités (4) et (5) qui sont vérifiées pour la suite des nombres n_q montre que le polynome $S_{kn_q}(y)$ contient le coefficient de plus grand module de la fonction $a_{n_q}(y)$, on peut ainsi écrire $F(x, y)$ sous la forme

$$(6) \qquad F(x, y) = G(x, y) + F_2(x, y)$$

avec

$$G(x, y = \sum_{q=1}^{q=\infty} g_{n_q} f_{n_q}(y) x^{n_q},$$

le polynome $f_{n_q}(y)$ de degré au plus égal à kn_q possède un coefficient de module égal à 1, et tous ses autres coefficients ont leur module au plus égal à 1.

Telle est l'égalité de M. Sire que je voulais obtenir, elle montre, eu égard à l'inégalité (3), que l'on a

$$(7) \qquad M(r, y) < 2f(R^k r) \qquad (r > r_0)$$

et elle justifie les deux hypothèses faites.

2. Pour obtenir une seconde inégalité entre $M(r, y)$ et $f(r)$, il faut étudier la suite des polynomes $f_{n_q}(y)$, ou une suite de polynomes extraite de celle-là. Considérons d'abord un seul polynome, que nous appellerons $g(y)$, de degré m, et dont tous les coefficients ont un module au plus égal à 1, l'un d'eux étant de module 1. Posons $y = u + iv$ et considérons dans le plan des u, v le carré C_R de côtés $4R$ parallèles aux axes et ayant pour centre l'origine soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ les s zéros de $g(y)$ qui sont contenus dans C_R. Mettons $g(y)$ sous la forme

$$g(y) = h(y)k(y), \qquad k(y) = \prod_1^s (x - \alpha_i),$$

le maximum du module de $g(y)$ pour $|y| = R$ est au moins égal à 1, si Y est une valeur pour laquelle ce maximum est atteint, on a pour $|y| \leqq R$

$$(8) \qquad |g(y)| > 3^{-(m-s)} \left| \frac{k(y)}{k(Y)} \right| > 3^{s-m} (2R)^{-s} |k(y)|.$$

Nous chercherons le minimum de $|k(y)|$ à l'extérieur de certains cercles obtenus par la méthode d'exclusion de M. Boutroux [1]. Partageons les côtés de C_R parallèles à Ou en Ms parties égales ($M > 24$) et joignons ces points deux à deux par des parallèles à Ov, nous déterminons une suite de Ms rectangles. Si un rectangle contient i zéros de $k(y)$, nous le marquons ainsi que les i rectangles précédents et les i rectangles suivants; si ce groupe de $2i + 1$ rectangles contient encore j autres zéros, nous marquons encore les j rectangles précédents et suivants, et ainsi de suite. On obtient ainsi un certain nombre de bandes formées par des ensembles de rectangles marqués, la largeur totale de ces bandes est au plus égale à $\frac{12R}{M}$, il reste donc dans le cercle $|y| = R$ des bandes non marquées. Si y est dans l'une de ces bandes ou sur l'un des grand côtés, on a

$$(9) \qquad |k(y)| > \left(\frac{4R}{Ms}\right)^s \left[\left(\frac{s}{2}\right)!\right]^2 > A\left(\frac{2R}{eM}\right)^s.$$

---

[1] Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta math.*, 1903).

Opérons de même en partant des côtés parallèles à Ov, nous aurons encore l'inégalité (9) dans les bandes non marquées, de sorte que cette inégalité est valable partout sauf dans les rectangles formés par la partie commune à deux bandes marquées parallèles Ou et Ov. Soit D un tel rectangle, si D ne contient pas de zéros, l'inégalité (9) valable sur les côtés du rectangle l'est aussi à l'intérieur puisque $|k(y)|$ atteint son minimum sur les côtés (si D a un côté commun avec C_R, il est extérieur au cercle $|y| = R$ et il n'y a pas lieu de l'examiner). Supposons maintenant que D contienne u zéros de $k(y)$; posons

$$k(y) = l(y)\, m(y),$$

$m(y)$ étant le polynome $\Pi(x - x_i)$ formé avec les zéros de $k(y)$ intérieurs à D, soit Y_1 la valeur de y pour laquelle $|l(y)|$ atteint son minimum dans l'aire D, Y_1 est sur l'un des côtés, et l'on a par suite, si y est intérieur à D,

$$|k(y)| > |k(Y_1)| \left| \frac{m(y)}{m(Y_1)} \right|.$$

Isolons les zéros de $k(y)$ intérieurs à D par des cercles ayant pour centres ces points et pour rayon $\frac{4R}{Ms}$, ces cercles ne coupent pas les côtés et par suite si y est extérieur à ces cercles, on a, en tenant compte de l'inégalité (9),

$$|k(y)| > |k(Y_1)| \left(\frac{4R}{Ms}\right)^u \left(\frac{M}{12R}\right)^u > A \left(\frac{2R}{eM}\right)^s \left(\frac{1}{3s}\right)^u.$$

Il en résulte que si u est inférieur ou égal à $\frac{s}{\log s}$, on aura à l'extérieur des cercles considérés

$$|k(y)| > A \left(\frac{2R}{3e^2 M}\right)^s. \tag{10}$$

Le nombre des rectangles D pour lesquels u est supérieur à $\frac{s}{\log s}$ est moindre que $\log s$, chacun d'eux peut être enfermé dans un cercle de rayon moindre que $\frac{12R}{M}$, la somme des rayons de ces cercles est donc moindre que $\frac{12R \log s}{M}$, quant aux cercles d'exclu-

sion de rayon $\frac{4R}{Ms}$, leur nombre étant moindre que s, la somme de leurs rayons est au plus égale à $\frac{4R}{M}$. L'inégalité (10) est donc valable pour $|y| < R$ à l'extérieur de cercles dont le nombre est moindre que s et dont la somme des rayons est au plus égale à $\frac{24R\log s}{M}$. D'après l'inégalité (8), on aura, à l'extérieur de ces cercles,

$$(11) \qquad |g(y)| > A(9e^2M)^{-m}.$$

Le calcul fait supposer implicitement que s est supérieur à un nombre fixe, 10 par exemple; il est manifeste que l'inégalité obtenue a lieu *a fortiori* dans le cas contraire.

Si l'on remplace M par l'un de ses multiples, les cercles de rayon $\frac{4R}{Ms}$ diminuent, les cercles contenant $\frac{s}{\log s}$ zéros au moins peuvent se décomposer en plusieurs autres qui leur sont intérieurs, ou bien leur rayon diminue; dans tous les cas l'aire de chaque région d'exclusion diminue et la somme des rayons est toujours moindre que $\frac{24R\log m}{M}$.

J'appellerai dans la suite *cercles d'exclusion*, relatifs au polynome $g(y)$ et correspondant au nombre M, les cercles construits à partir de ce nombre M par la méthode précédente.

On constatera facilement, en prenant pour zéros les sommets d'un carrelage en triangles équilatéraux, que la relation entre le minimum de $|g(y)|$ à l'extérieur de certains cercles et la somme des rayons de ces cercles ne peut guère être améliorée; l'inégalité opposée à (11) peut effectivement être réalisée à l'intérieur de cercles dont la somme des rayons est de la forme $B\frac{\sqrt{\log m}}{M}$.

3. Pour déduire des résultats précédents une limitation inférieure de $M(r, y)$ valable en général, on procédera de la façon suivante. Donnons-nous une valeur approchée de $f(r)$, c'est-à-dire des inégalités de la forme

$$r^\alpha < \psi_1(r) < \log f(r) < \psi_2(r);$$

on déduit de là, par l'application des méthodes de la théorie des

fonctions entières, que les coefficients g_n vérifient une inégalité de la forme

$$g_n \geqq \chi(n)$$

valable pour une suite infinie $n'_1, n'_2, \ldots, n'_p, \ldots$ de valeurs de n telles que $n'_p \leqq \theta(n'_{p-1})$, $\theta(n)$ étant une fonction croissante qui dépend de $\psi_2(r)$ et du rapport $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ (¹). Si ce rapport est petit vis-à-vis de $\psi_2(r)$, $\log\chi(n)$ est supérieur à $-\frac{n}{\alpha}\log n$, et l'inégalité (4) est vérifiée pour les nombres n'_p qui font donc partie de la suite n_q définie au n° 1. Extrayons alors de la suite n'_p une suite de nombre $N_1, N_2, \ldots, N_p$ assez denses pour que l'on ait

$$\log(\Sigma g_{N_p} r^{N_p}) > \psi_1(r)\varepsilon(r) > r^{\alpha},$$

$\varepsilon(r)$ étant une fonction tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, et faisons-lui correspondre une suite de nombres M_p tels que la série

$$S = \sum_p \frac{\log N_p}{M_p} \tag{12}$$

soit convergente. Considérons la suite des polynomes $f_{N_p}(y)$ et construisons pour chacun d'eux les cercles d'exclusion correspondant aux nombres $M_{\omega,p} = 2^{\omega} M_p$, soit $\Gamma_{\omega,p}$ l'ensemble des cercles d'exclusion relatifs au polynome d'indice N_p et au nombre $M_{\omega,p}$. Si ω est donné, les cercles $\Gamma_{\omega,p}$ forment une suite énumérable de domaines entourant les zéros des polynomes $f_{N_p}(y)$, soit E_ω l'ensemble des points du cercle $|y| < R$ qui sont intérieurs à l'un au moins de ces cercles. D'après ce qui a été dit, l'ensemble $E_{\omega+1}$ est intérieur (au moins au sens large) à E_ω, soit donc E l'ensemble des points communs à tous les ensembles E_ω. C'est un ensemble ponctuel, car les points de E appartiennent à E_ω quel que soit ω, et l'on peut prendre ω assez grand pour que la somme $A\frac{S}{2^{\omega}}$ des rayons des cercles $\Gamma_{\omega,p}$ soit arbitrairement petite. C'est aussi un ensemble régulier ayant pour points fondamentaux les zéros des polynomes $f_{N_p}(y)$ intérieurs au cercle $|y| < R$, mais certaines des aires d'exclusion sont groupées.

(¹) *Voir* les Mémoires cités (note de la page 116).

Si un point y n'appartient pas à E, il est extérieur à un certain ensemble E_{ω_0}, donc à tous les cercles $\Gamma_{\omega_0 p}$, on a donc, quel que soit p,

$$(13) \qquad |f_{N_p}(y)| > [B 2^{-\omega_0} M_p^{-1}]^{kN_p}.$$

Supposons que l'on ait à partir d'une valeur de r, qui dépend d'ailleurs de ω_0,

$$(14) \quad \log\varphi(r) > \psi_1(r)\varepsilon(r)\varepsilon_1(r) > r^{\alpha}, \qquad \varphi(r) = \sum g_{N_p}\left(\frac{B}{2^{\omega_0} M_p}\right)^{kN_p} r^{N_p}.$$

Comme $\varphi(r)$ est constitué par une partie de la série formée par les modules des termes de la fonction $G(x, y)$, le maximum du module de cette fonction $G(x, y)$ restera supérieur à $[\varphi(r)]^{\frac{3}{4}}$ à partir d'une certaine valeur de r, on aura donc

$$(15) \qquad \log M(r, y) > \frac{1}{2}\psi_1(r)\varepsilon(r)\varepsilon_1(r) \qquad (r > r_0)$$

à l'extérieur de l'ensemble ponctuel E ([1]).

Pour que l'inégalité (14) soit intéressante, il faut évidemment que M_p soit infiniment petit par rapport à N_p, et comme la série (12) doit converger, les intervalles $N_{p+1} - N_p$ doivent croître assez vite. Si l'on se borne à rechercher une égalité valable à l'extérieur d'un ensemble ponctuel, il suffira de prendre les M_p assez grands pour que la série (12) converge, de façon à réduire autant que possible la valeur de $\varepsilon_1(r)$.

Mais on doit remarquer que l'ensemble E peut être dense dans tout le cercle $|y| < R$; il suffit, en effet, que les zéros des polynomes $f_{N_q}(y)$ soient denses dans ce cercle pour que tout point du cercle soit point de condensation de E ([2]). Il est donc légitime de s'occuper de l'ordre de l'ensemble E, c'est-à-dire de la façon dont la série S converge. Dans une aire où les zéros des polynomes $f_{N_q}(y)$ sont denses, la densité des points de E dépend de la rapidité de la convergence de la série S; nous appellerons *ordre asymptotique*

([1]) Je m'appuie sur la propriété suivante des fonctions d'ordre fini : Le rapport du logarithme du maximum du module au logarithme du module du terme de plus grand module tend vers *un* (G. Valiron, *Thèse*).

([2]) *Voir* les travaux cités de M. Borel, et ma Note *Sur les ensembles réguliers de mesure nulle* (*Comptes rendus*, t. 169, p. 1078).

de E, *l'ordre de grandeur de la fonction* $\frac{M_p}{\log N_p}$ *de* p, *noté suivant les méthodes de M. Borel.* Cette définition n'est pas tout à fait celle de M. Borel, elle en diffère surtout en ce que les aires d'exclusion relatives aux zéros d'un même polynome sont groupées pour former un seul terme de la série S, ce groupement s'impose car si l'on ne le faisait pas les divers cas ne se distingueraient pas.

4. Comme premier exemple prenons celui de la croissance régulière au sens de M. Borel. On sait que $f(r)$ étant d'ordre ρ à croissance régulière, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log_2 f(r)}{\log r} = \rho,$$

g_n vérifie l'inégalité

$$(16) \qquad \log g_n \geqq -(1+\varepsilon_n)\frac{n}{\rho}\log n \qquad (n = n'_1, n'_2, \ldots, n'_p, \ldots)$$

avec

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log n'_{p+1}}{\log n'_p} = 1;$$

et que réciproquement les conditions (16) entraînent l'inégalité

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log_2(\Sigma g_{n'_p} r^{n'_p})}{\log r} \geqq \rho \quad (^1).$$

Extrayons de la suite des nombres n'_p une suite de nombres N_p tels que

$$\log_2 N_p \geqq (\log p)^A, \qquad A > 1, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log N_{p+1}}{\log N_p} = 1,$$

ce qui est évidemment possible, nous aurons encore

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log_2(\Sigma g_{N_p} r^{N_p})}{\log r} \geqq \rho;$$

prenons enfin $M_p = (N_p)^{\frac{1}{p}}$; le logarithme du $p^{\text{ième}}$ terme de la série S sera moindre que $-e^{(\log p)^B}$, B étant inférieur à A; l'ordre asymptotique de E sera donc au moins égal à $\omega^2 B \frac{1}{\omega}$. A l'extérieur

(1) Résultat donné explicitement par E. Lindelöf dans le Mémoire cité.

de l'ensemble E, les polynomes $f_{N_p}(y)$ vérifient l'inégalité

$$\log|f_n(y)| > k\,\frac{n}{p}\log\frac{K(y)}{n} \qquad (n = N_p),$$

$K(y)$ étant un nombre fini dépendant de y, on a donc aussi

$$\log|g_n f_n(y)| > -\frac{n}{\rho}(1+\varepsilon'_n)\log n \qquad (n = N_p,\ \lim\varepsilon'_n = 0),$$

d'où le résultat suivant qui complète celui de M. Sire :

Si $f(r)$ est d'ordre ρ à croissance régulière, $F(x, y)$ est aussi d'ordre ρ et à croissance régulière pour $|y| < R$, à l'extérieur d'un ensemble ponctuel régulier E d'ordre au moins égal à $\omega^2 B\,\frac{1}{\omega}$, B étant arbitrairement grand.

Il est clair que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points pour lesquels $F(x, y)$ n'est plus d'ordre ρ et à croissance régulière peut être d'ordre bien inférieur à celui de E, il peut même ne renfermer aucun point; mais on peut former des fonctions pour lesquelles cet ensemble $\mathcal{E}$ est partout dense dans le cercle $|y| < R$ et est d'ordre $\omega^2(1)$.

Prenons

$$F(x, y) = \sum (y - \alpha_n)^n \frac{x^n}{n!},$$

les nombres α_n étant définis de la façon suivante : dans le carré C_R de côtés $2R$ ayant pour centre l'origine, on considère la suite des points à coordonnées rationnelles, numérotée normalement, par exemple en prenant d'abord les points à coordonnées entières, puis ceux dont les coordonnées ont un dénominateur au plus égal à 2, etc.; soit a_p le $p^{\text{ième}}$ de ces points. Nous prenons

$$\alpha_n = a_p \qquad \text{pour} \qquad N_p \leq n < N_{p+1} \qquad (L_2 N_p = p)$$

(Lu désignant le logarithme base 10 de u).

On a évidemment $\log f(r) = h_r r$, h_r étant fini.

A partir des points a_p nous construisons un ensemble régulier E de la façon suivante : ω étant un entier, nous considérons les cercles $\Gamma_{p,\omega}$ de centre a_p et rayons $\frac{1}{\omega N_{p+1}}$, et nous désignons par E_ω l'ensemble des points intérieurs à l'un des cercles $\Gamma_{p,\omega}$ au

moins ($p = 1, 2, \ldots$); l'ensemble E est l'ensemble des points communs à tous les ensembles E_ω. C'est un ensemble d'ordre asymptotique $\omega^2(1)$, admettant tout point du carré C_R pour point de condensation. Si y est un point de E autre qu'un point a_p, il existe une suite infinie de points a_p tels que

$$|y - a_p| N_{p+1} < 1.$$

Soit p une telle valeur, et $r = |x| = \frac{N_{p+1}}{\mu}$. Comme

$$|y - \alpha_n| < 4\sqrt{2}R,$$

on a

$$M(r, y) < \sum_{1}^{N_p - 1} \frac{(4\sqrt{2}Rr)^n}{n!} + \sum_{N_p}^{N_{p+1}-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{r}{N_{p+1}}\right)^n + \sum_{N_{p+1}}^{\infty} \frac{(4\sqrt{2}Rr)^n}{n!},$$

la seconde somme est inférieure à $e^{\frac{1}{\mu}}$, la troisième à 1 si $\mu > 4\sqrt{2}Re$, enfin la première à $(N_{p+1})^{N_p}$, donc à $(\mu r)^{(\mu r)^{\frac{1}{10}}}$; d'où l'inégalité

$$\log M(r, y) < r^{\frac{1}{9}} \qquad \text{pour} \qquad r = \frac{1}{\mu} N_{p+1}$$

et pour une suite infinie de valeurs de p; $F(x, y)$ *est très irrégulière pour les points d'un ensemble régulier d'ordre asymptotique* $\omega^2(1)$ *admettant tout point du carré* C_R *pour point de condensation.*

On formera aisément des exemples analogues dans lesquels l'ordre de la fonction $f(r)$ sera un nombre quelconque ρ, ainsi que des exemples dans lesquels l'ensemble des valeurs exceptionnelles admettra tout point du plan pour tout point de condensation [1].

5. Comme second exemple, prenons le cas où $f(r)$ est défini par des inégalités de la forme

$$(17) \qquad r^\rho (\log r)^B < \log f(r) < r^\rho (\log r)^A \quad (A > B),$$

on en déduit que g_n vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{n}\log g_n > C - \frac{1}{\rho}\log n + \frac{B}{\rho}\log_2 n - \frac{1}{\rho}\log_3 n$$

---

[1] *Voir* ma Note des *Rendiconti*.

pour une suite de valeurs $n'_1, n'_2, \ldots, n'_p, \ldots$ telles que

$$\frac{n'_{p+1}}{n'_p} < (\log n'_p)^{A-B} \log_2 n'_p \quad (^1).$$

On pourra prendre ici

$$N_p \geqq p^{\beta p}, \qquad \frac{N_{p+1}}{N_p} < K(\log N_p)^{\beta},$$

β étant supérieur à A — B. Cherchons à obtenir pour $M(r, y)$ des inégalités de la même forme que (17), on devra prendre

$$M_p = (\log N_p)^{\gamma} \qquad (\gamma > 2),$$

et l'on aura à l'extérieur de l'ensemble E correspondant

$$\frac{1}{n} \log |g_n f_n(y)| > -\frac{1}{\rho} \log n + (B - \gamma k - \varepsilon_p) \log_2 n \qquad (n = N_p),$$

ε_p tendant vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Il résulte de cette inégalité et de la relation entre N_p et N_{p+1} que l'on a

$$\log M(r, y) > r^{\rho} (\log r)^{B - \rho\gamma k - \beta - \varepsilon(r)}.$$

Le terme de rang p de la série (12) est ici au plus égal à

$$(\log N_p)^{1-\gamma} < (\beta p \log p)^{1-\gamma},$$

le nombre β ne joue donc qu'un rôle minime dans la détermination de l'ordre asymptotique et peut être pris très voisin de A — B. En se reportant à la valeur de k, on voit qu'on a le résultat suivant :

Si $F(x, y)$ *est d'ordre apparent total* λ *et si* $f(r)$ *vérifie les conditions* (17), *on a*

$$(18) \quad r^{\rho} (\log r)^{B - \gamma_1(\lambda - \rho) - A - B} < \log M(r, y) < H r^{\rho} (\log r)^{A} \qquad (H \text{ fini}, \gamma_1 > 2)$$

pour $|y| < R$, *sauf peut-être pour les valeurs* y *appartenant à un ensemble ponctuel régulier* E *d'ordre asymptotique* $(\gamma_1 - 1)$.

On ne peut obtenir par la méthode précédente des inégalités plus serrées que (18) valables à l'extérieur d'un ensemble ponctuel. Cette limitation de l'approximation dans la relation qui existe

---

(1) Il suffit d'appliquer la méthode générale indiquée dans ma *Thèse*.

entre $f(r)$ et $M(r, y)$ ne tient pas uniquement à l'imperfection de la méthode, mais aussi à la nature même du problème.

Prenons encore

$$F(x, y) = \sum (y - \alpha_n)^n \frac{x^n}{n!},$$

si l'on suppose $|\alpha_n| < 2$, on a $\log f(r) = h_r r$, h_r restant fini; or on peut choisir les α_n de telle façon que l'on ait pour une infinité de valeurs de r, et pour tous les points du segment $0 - 1$,

$$\log M(r, y) < r(\log r)^{-\gamma} \quad (\gamma > 0).$$

Il suffit pour cela de prendre sur le segment $0 - 1$ les points dont l'abscisse a un développement décimal limité, ces points étant numérotés normalement $\Big($les $10^q - 10^{q-1}$ points dont l'abscisse est de la forme $\frac{k}{10^q}$, k n'étant pas multiple de 10, sont numérotés de 10^{q-1} à 10^q dans l'ordre des abscisses croissantes$\Big)$; si a_p est le $p^{\text{ième}}$ de ces points, nous posons

$$\alpha_n = a_p \qquad \text{pour} \qquad N_p \leqq n < N_{p+1} \qquad (\mathrm{L}N_p = p^2).$$

Si y est un point du segment $0 - 1$, il existe une suite infinie de points a_p (correspondant aux valeurs approchées de y) tels que

$$|y - a_p| < \frac{10}{p}.$$

Pour une telle valeur de p et pour $r = \frac{N_{p+1}}{\mu}$, on aura

$$|F(x, y)| < \sum_{1}^{N_p - 1} \frac{(2r)^n}{n!} + \sum_{N_p}^{N_{p+1} - 1} \left(\frac{10r}{p}\right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{N_{p+1}}^{\infty} \frac{(2r)^n}{n!},$$

ce qui donne visiblement

$$\log M(r, y) < K r (\log r)^{-\frac{1}{2}}.$$

On construira de même des fonctions pour lesquelles le rapport de $\log M(r, y)$ à $f(r)$ restera, pour une suite de valeurs de r indéfiniment croissantes, inférieur à $K(\log r)^{-\frac{1}{2}}$, et cela pour tous les points y appartenant à un carré.

SUR UNE NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME DE L'AIGUILLE;

PAR M. B. HOSTINSKÝ.

J'ai rédigé ce travail d'après un article écrit en langue tchèque que j'avais publié, en 1917, dans les *Mémoires de l'Académie tchèque* à Prague (*Rozpravy Ceské Akademie*, t. XXVI, classe II, n° 13).

1. *La solution classique du problème de l'aiguille.* — On lance une aiguille cylindrique sur un plan horizontal, où sont tracées des parallèles équidistantes; la distance $2a$ de deux parallèles voisines est supposée plus grande que la longueur $2b$ de l'aiguille.

Quelle est la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles?

Buffon [1] a donné une première solution de ce problème; sa solution s'appuie sur les deux hypothèses suivantes :

I. La probabilité pour que le centre de l'aiguille soit à l'intérieur d'une partie ε du plan, limitée par un contour fermé, est proportionnelle à l'aire de ε.

II. La probabilité, pour que l'angle ω que fait l'axe de l'aiguille avec une droite fixe du plan soit compris entre ω_1 et ω_2, est proportionnelle à la différence $\omega_2 - \omega_1$.

Choisissons une des parallèles données pour l'axe des x; les parallèles seront représentées par les équations

$$y = 0, \quad y = 2a, \quad y = 4a, \quad \ldots, \quad y = 2na.$$

Nous cherchons, en premier lieu, la probabilité pour que le centre de l'aiguille (ou, avec plus de précision, la projection du centre sur le plan des parallèles) se trouve à l'intérieur du rec-

---

[1] BUFFON, *Essai d'arithmétique morale* (Supplément à l'*Histoire naturelle*, vol. IV, 1777), p. 101.

tangle formé par les points A (o, o), B (s, o), C (s, a), D (o, a), et que l'aiguille coupe en même temps le côté AB. Cette probabilité est égale à la probabilité cherchée p.

Soient x, h les coordonnées du centre S de l'aiguille et fixons, sur l'axe de l'aiguille, un sens positif que fait l'angle ω avec l'axe Oy ($-\pi < \omega < +\pi$). La condition que l'aiguille coupe le côté AB du rectangle s'exprime par les inégalités

$$-\arccos\frac{h}{b} < \omega < \arccos\frac{h}{b} \quad \text{ou} \quad -\arccos\frac{h}{b} < 2\pi - \omega < \arccos\frac{h}{b}.$$

L'angle ω doit être à l'intérieur de l'un de ces deux intervalles; mais il suffit de considérer seulement les valeurs de ω qui sont comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$. On a

$$(1) \qquad p = \frac{\int\int_F\int dx\,dh\,d\omega}{\int\int\int dx\,dh\,d\omega}.$$

L'intégrale qui figure dans le dénominateur est étendue au domaine de tous cas possibles; ce domaine est défini par les inégalités

$$0 < \omega < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < h < a, \qquad 0 < x < s;$$

l'autre intégrale est étendue au domaine F des cas favorables qui est défini par les inégalités

$$0 < \omega < \arccos\frac{h}{b}, \qquad 0 < h < b, \qquad 0 < x < s.$$

La première intégrale étant égale à $\frac{1}{2}\pi as$, la seconde à bs, la formule (1) donne

$$p = \frac{2b}{\pi a},$$

ce qui est le résultat de Buffon.

Si l'on jette l'aiguille μ fois, et si elle rencontre, dans ces μ expériences, ν fois une parallèle, on a la relation approchée

$$\frac{2b}{\pi a} = \frac{\nu}{\mu} \qquad \text{ou} \qquad \pi = \frac{2b\mu}{a\nu};$$

ainsi, on est amené à faire une « détermination expérimentale du nombre π ».

2. *Objections contre la solution classique du problème.* — Il est réellement impossible d'imaginer un tel mode d'expériences qui serait compatible avec l'hypothèse I. Considérons, par exemple, les conditions suivantes : les parallèles sont tracées sur une table qui a la forme d'un carré. On commence par placer l'aiguille au centre de ce carré, l'axe de l'aiguille étant vertical; puis on imprime à l'aiguille une vitesse verticale déterminée. Il y a toujours de petites erreurs dans ces conditions initiales; l'aiguille commence son mouvement dans une position qui n'est qu'approximativement verticale, et la vitesse initiale varie d'une expérience à l'autre, soit en grandeur, soit en direction. C'est pourquoi l'aiguille tombe, dans des expériences différentes, sur des places différentes de la table. Mais il est nécessaire que les erreurs, dans les conditions initiales, ne soient pas trop grandes, car l'aiguille ne doit pas tomber en dehors de la table. Supposons donc qu'il est peu probable que le centre de l'aiguille tombe sur le bord de la table et soit p_1 la probabilité pour que le centre de l'aiguille soit à l'intérieur d'un carré déterminé, de côté de 1^{cm}, qui est tracé au voisinage du centre de la table; et soit p_2 la probabilité analogue pour un carré de côté de 1^{cm} qui est tracé dans le voisinage du bord de la table. Il est évident qu'on doit avoir $p_1 > p_2$; l'hypothèse I n'est pas admissible.

Par conséquent, si nous voulons calculer la probabilité pour que le centre de l'aiguille se trouve à l'intérieur d'un domaine donné du plan, il faut remplacer l'hypothèse I par une autre, plus générale que celle-là. Nous admettrons que cette probabilité est proportionnelle à l'intégrale

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

étendue au domaine considéré. La fonction $f(x, y)$ n'est pas donnée. Mais on sait [1], qu'il y a certains problèmes, où la probabilité étudiée ne dépend pas de la fonction $f(x, y)$; dans ces

[1] H. Poincaré, *Le calcul des probabilités*, Paris, 1896; 2e édition, 1912, p. 147.

cas, il suffit d'imposer à la fonction f des conditions d'un caractère très général (on suppose la continuité ou l'existence des dérivées, et ainsi de suite), et la fonction n'apparaît pas dans le résultat final.

J'ai trouvé qu'on peut, en employant cette méthode, résoudre le problème de l'aiguille. La solution est exposée dans le n° 4; elle repose sur un théorème dont la démonstration se trouve dans le n° 3.

3. *Theorème de Poincaré.* — *a.* Soit $y = \varphi(x)$ une fonction de la variable x, uniforme et continue dans l'intervalle (x_0, x_1); nous supposons que la dérivée $\varphi'(x)$ de $\varphi(x)$ vérifie la condition

$$|\varphi'(x)| < K,$$

K étant une constante. Divisons l'intervalle (x_0, x_1) en $2m$ parties égales, et construisons, dans chaque point de division, l'ordonnée correspondante de la courbe $y = \varphi(x)$. L'aire limitée par les deux ordonnées extrêmes, par l'arc de la courbe et par l'axe Ox, se trouve ainsi divisée en $2m$ parties.

La première partie va de $x = x_0$ jusqu'à $x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{2m}$, la deuxième partie va de $x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{2m}$ jusqu'à $x = x_0 + 2\frac{x_1 - x_0}{2m}$, et ainsi de suite. Nous appellerons, pour abréger, blanche toute partie à indice impair, et noire toute partie d'indice pair.

Si m augmente indéfiniment, la somme des aires blanches a une limite égale à celle de la somme des aires noires, ou à la moitié de l'aire totale (Poincaré).

Nous allons généraliser ce théorème.

b. Soit A un domaine à trois dimensions d'un seul tenant et situé à distance finie. Nous désignons, en même temps, par A le volume

$$\int\int_A\int dx\,dy\,dz$$

de ce domaine.

Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction, uniforme et continue dans A, et pourvue de dérivées premières continues; on suppose, de plus,

que ces dérivées vérifient dans tout le domaine A les inégalités

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| < K, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| < K, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| < K,$$

K étant une constante.

Divisons maintenant le domaine A en *m domaines élémentaires* égaux. Un domaine élémentaire quelconque doit être seul tenant; son volume est égal à

$$\varepsilon = \frac{A}{m}.$$

Outre cela, nous supposons que la division soit faite d'une telle manière que la distance de deux points contenus dans un même domaine élémentaire ne soit jamais plus grande qu'un certain nombre l.

Enfin, nous divisons chaque domaine élémentaire en deux parties (dont chacune peut être composée de plusieurs parties plus petites séparées les unes des autres); le volume de la première ou partie *blanche* est égal à $\lambda\varepsilon$, celui de la seconde ou *noire* à $(1-\lambda)\varepsilon$. Le rapport λ de la partie blanche au volume total du domaine considéré doit être constant; c'est un nombre, compris entre 0 et 1, qui ne dépend ni du domaine élémentaire considéré, ni du nombre m.

Désignons par I et par I_1 les intégrales suivantes :

$$I = \int\int_A\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \qquad I_1 = \int\int_{A_1}\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

La première est étendue au domaine primitif A, la seconde au domaine A_1 formé par toutes les parties blanches contenues à l'intérieur de A.

L'intégrale I_1 dépend du nombre m. Si nous faisons croître m indéfiniment, et si l tend en même temps vers zéro, on a

$$\lim_{m=\infty} I_1 = \lambda I. \tag{2}$$

Nous allons démontrer cette formule. La démonstration repose sur l'équation

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_2 \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_3 \Delta z, \tag{3}$$

où

$$\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y, z);$$

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_2$ et $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_3$ sont les valeurs des dérivées premières de la fonction φ en trois points (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i = 1, 2, 3)$ dont les coordonnées satisfont aux conditions

$$x \leqq \xi_i \leqq x + \Delta x, \qquad y \leqq \eta_i \leqq y + \Delta y, \qquad z \leqq \zeta_i \leqq z + \Delta z.$$

Soit maintenant δ un domaine élémentaire quelconque; il y a, à l'intérieur de δ, un point (x, y, z), où la fonction φ reçoit la plus grande valeur M et un point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, où φ reçoit la plus petite valeur μ'. On a

$$|\Delta x| \leqq l, \qquad |\Delta y| \leqq l, \qquad |\Delta z| \leqq l;$$

l'équation (3) montre que

$$\mu - \mu' = \Delta\varphi < 3\,l\,\mathrm{K}. \tag{4}$$

La partie de l'intégrale I, relative au domaine élémentaire δ considéré, multipliée par λ, est moindre que $\lambda\mu\varepsilon$; la partie de l'intégrale I_1 relative à la portion blanche de δ est plus grande que $\lambda\mu'\varepsilon$. Faisons la différence de ces deux parties; nous obtenons une partie de l'intégrale triple $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{I}_1$ qui est plus petite que

$$(\mu - \mu')\,\varepsilon\lambda < 3\,l\,\lambda\,\mathrm{K}\,\varepsilon = \frac{3\,l\,\lambda\,\mathrm{KA}}{m}.$$

L'intégrale triple $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{I}_1$ entière est composée de m parties, donc

$$|\lambda\mathrm{I} - \mathrm{I}_1| < 3\,l\,\lambda\,\mathrm{KA}. \tag{5}$$

La quantité l a pour limite zéro, quand m augmente indéfiniment; la formule (2) se trouve ainsi démontrée.

Il serait aisé d'étendre la démonstration aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Dans le cas d'une seule variable indépendante, la formule (2) donne, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, le théorème de Poincaré énoncé plus haut.

c. Supposons enfin qne la valeur de φ ne dépend pas de z. Le troisième terme dans le second membre de (3) disparaît et l'on

aura, au lieu de (4), l'inégalité

$$(4') \qquad \mu - \mu' < 2lK.$$

Cette inégalité a lieu, quand même la condition $|\Delta z| \geqq l$ n'est pas vérifiée; dans ce cas, on aura, au lieu de (5), l'inégalité

$$(5') \qquad |\lambda I - I_1| < 2l\lambda KA,$$

d'où la conclusion suivante : Si l'on suppose que la valeur de la fonction φ ne dépend pas de z, le théorème (2) subsiste dans le cas où les dimensions des domaines élémentaires, mesurées parallèlement à l'axe Oz, n'ont pas zéro pour limite, m augmentant indéfiniment.

4. *Solution nouvelle du problème de l'aiguille.* — Pour donner au problème de l'aiguille un énoncé plus précis, nous allons remplacer l'hypothèse I (*voir* le n° 1) par une hypothèse plus générale.

Voici les deux hypothèses du problème :

Première hypothèse. — On lance l'aiguille d'une telle manière que, dans chaque expérience, son centre tombe sur un point qui se trouve à l'intérieur d'un carré C dans le plan horizontal. Les sommets du carré C ont les coordonnées

$$(0, 0), \qquad (s, 0), \qquad (s, s), \qquad (0, s).$$

Le côté s du carré est égal à un multiple entier de la distance $2a$ de deux parallèles voisines; on a

$$s = 2na.$$

Les droites parallèles

$$y = 0, \qquad y = 2a, \qquad y = 4a, \qquad \ldots, \qquad y = 2na$$

divisent le carré C en n rectangles congruents; les dimensions d'un rectangle sont $2na$ et $2a$.

La probabilité pour que le centre de l'aiguille se trouve à l'inté-

rieur d'une courbe fermée est égale à

$$\frac{\int\int \varphi(x, y)\, dx\, dy}{\int_0^s \int_0^s \varphi(x, y)\, dx\, dy};$$

l'intégrale dans le numérateur est étendue à l'intérieur de la courbe donnée.

La fonction $\varphi(x, y)$ est continue, ainsi que ses dérivées premières, et l'on a, quel que soit le point (x, y) à l'intérieur de C,

$$\left|\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\right| < K, \qquad \left|\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\right| < K,$$

K étant une constante.

Seconde hypothèse. — La probabilité, pour que l'angle ω que fait l'axe de l'aiguille avec une droite fixe du plan soit compris entre ω_1 et ω_2, est proportionnelle à la différence $\omega_2 - \omega_1$.

Ces hypothèses étant admises, calculons la probabilité p' pour que l'aiguille coupe une quelconque des parallèles situées à l'intérieur de C. On trouve

$$(6) \qquad p' = \frac{\int\int_{A_1}\int \varphi(x, y)\, dx\, dy\, d\omega}{\int\int_{A}\int \varphi(x, y)\, dx\, dy\, d\omega}.$$

Le domaine A est défini (*voir* le n° 1) par les inégalités

$$0 < x < 2na, \qquad 0 < y < 2na, \qquad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Le domaine A_1 (qui correspond aux « cas favorables ») est composé de $2n$ parties. Chaque partie est définie d'une manière tout à fait analogue à celle qui a été employée pour le domaine d'intégration F dans le numérateur de la fonction (1); on a, pour m parties, les inégalités

$$0 < x < 2na, \qquad 2\nu a < y < 2\nu a + b, \qquad 0 < \omega < \arccos\frac{y - 2\nu a}{b}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

et pour les m autres :

$$0 < x < 2na, \qquad 2\nu a - b < y < 2\nu a, \qquad 0 < \omega < \arccos \frac{2\nu a - y}{b}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient x, y, ω les coordonnées rectangulaires d'un point; ce point représente une position déterminée de l'aiguille sur le plan de C, x, y étant les coordonnées de son centre et ω l'angle que fait son axe avec Ox.

Le domaine A sera ainsi représenté par un parallélépipède rectangle qui a le carré C pour base et dont la hauteur est égale à $\frac{\pi}{2}$. Divisons le domaine A en n^2 domaines élémentaires par des plans verticaux qui contiennent les parallèles données :

$$y = 2\nu a \, (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et par des plans qui sont perpendiculaires aux précédentes :

$$x = 2\nu a \, (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Chaque *domaine élémentaire* a donc une hauteur égale à $\frac{\pi}{2}$ et sa base est un carré dont le côté est égal à $2a$.

Coupons encore ces domaines élémentaires par les surfaces cylindriques suivantes :

$$\omega' = \arccos \frac{y - 2\nu a}{b} \, (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$\omega = \arccos \frac{2\nu a - y}{b} \, (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les génératrices sont parallèles à Ox. Chaque domaine élémentaire est divisé ainsi en deux parties; la *partie blanche* est composée des points représentatifs (x, y, ω) correspondant aux cas où l'aiguille se met parallèle, le reste constitue la *partie noire*.

Le domaine A_1 est précisément constitué par l'ensemble de toutes les parties blanches. Le rapport p qui figure dans l'équation (1) est égal à $\frac{A_1}{A}$ ou bien au rapport d'une partie blanche d'un domaine élémentaire quelconque à ce domaine entier.

La formule (6) montre que la probabilité p' dépend du nombre n des parallèles.

Cela posé, appliquons le théorème (2); nous nous trouvons dans les circonstances particulières du n° 3 c, car la valeur de la fonction φ ne dépend pas de la troisième variable $z = \omega$. En revenant aux notations du n° 3, on a

$$\omega = z, \qquad n^2 = m, \qquad \lambda = \frac{2b}{\pi a}.$$

Si nous admettons que n augmente indéfiniment, tandis que $s = 2na$ et $\frac{b}{a}$ ne changent pas, la formule (2) donne

$$\lim_{n=\infty} p' = \frac{2b}{\pi a};$$

mais, si nous ne voulons pas changer les hypothèses énoncées au début de ce numéro, nous ne pouvons déduire des calculs précédents qu'une formule approchée de p'.

Les deux hypothèses, énoncées plus haut, étant admises, et le nombre des parallèles tracées à l'intérieur du carré C *étant très grand, l'expression* $\frac{2b}{\pi a}$ *donne une valeur approchée de la probabilité pour que l'aiguille rencontre l'une des parallèles.*

Cette expression s'approche autant de la probabilité cherchée que la fonction $\varphi(x, y)$ diffère moins d'une constante. Si $\varphi(x, y) = \text{const.}$, les deux hypothèses du n° 4 se confondent avec celles du n° 1 et la formule (6) devient identique avec la formule (1) ou (1').

Une série d'expériences peut nous fournir des valeurs approchées de la fonction $\varphi(x, y)$; une détermination précise de $\varphi(x, y)$ est impossible. Nous en tirons une conséquence négative pour ce qui concerne la « détermination expérimentale du nombre π » à l'aide de l'aiguille (*voir* la fin du n° 1). En effet, il ne faut pas s'attendre à obtenir ainsi pour π une valeur très précise; il n'est point sûr que le degré de précision que l'on atteint, en lançant l'aiguille N fois, soit comparable au degré de précision avec lequel on peut mesurer la longueur $2b$ de l'aiguille et la distance $2a$ de deux parallèles, quelque grand que soit le nombre N.

Je remarque enfin que M. Carvallo [1] a fait des objections contre la solution classique du problème de l'aiguille; ses objections sont de même nature que celles qui ont été exposées dans le n° 2 du présent travail.

---

[1] E. Carvallo, *Le calcul des probabilités et ses applications.* Paris, 1912, p. 150. *Voir* aussi le Livre de M. Borel, *Le Hasard,* p. 80 et suiv.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

La Vallée Poussin (C. de). — *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, professées à la Sorbonne. Un volume in-8° raisin (162 × 250) de viii-150 pages; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1919. Prix : 16fr.

Drzewiecki (S.). — *Théorie générale de l'Hélice; Hélices aériennes et Hélices marines.* Un volume in-8° raisin (250 × 162) de xii-184 pages, avec 43 figures dans le texte, 9 planches et 4 tables hors texte; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920. Prix : 20fr.

Pigeaud (Gaston). — *Résistance des Matériaux et Élasticité;* Cours professé à l'École des Ponts et Chaussées. Un volume in-8° raisin (250 × 162) de xvi-772 pages, avec 201 figures dans le texte; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920. Prix : 64fr.

Opere di Evangelista Torricelli, publiées à l'occasion du troisième centenaire de sa naissance, avec le concours de la ville de Faenza, par *Gino Loria* et *Giuseppe Vassura.* En trois volumes in-8°; avec un portrait de Torricelli, de nombreuses figures, des tables lithographiées, des fac-similés d'autographes. Faenza, Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, amministrato dall' Orfanotrofio Maschi, 1919. Prix : 60fr.

1ère Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VALLÉE POUSSIN (C de la). — Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, professées à la Sorbonne. (*Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*, publiée sous la direction d'Émile Borel.) 1 vol. in-8 raisin, VIII-150 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1919.

C'est le second Livre que M. de la Vallée Poussin publie dans la « Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions » dirigée par M. Borel; comme le précédent, ce Livre traite de travaux récents dont beaucoup sont dus, quant au fond, à M. de la Vallée Poussin lui-même et qui, tous, ont tout au moins reçu de lui, quant à l'énoncé et à la démonstration, la forme simple, précise et en quelque sorte classique sous laquelle il les présente.

Dans la Préface, datée de Louvain, juillet 1919, M. de la Vallée Poussin déclare que son Livre est presque exactement la reproduction des leçons qu'il fit à la Sorbonne en 1918 et il saisit cette occasion d'exprimer sa gratitude pour l'hospitalité que l'Université de Paris lui a donnée « aux jours sombres ».

Tous les Professeurs de l'Université de Paris seront touchés de ce témoignage; mais ils se demanderont, avec moi, si ce n'est pas nous qui devrions remercier M. de la Vallée Poussin d'avoir fait des cours et des conférences au Collège de France et à la Sorbonne et d'avoir, en publiant deux de ses cours, doté la littérature mathématique française de deux des meilleurs Livres dont elle se soit enrichie depuis 1914.

Le sujet dont s'occupe M. de la Vallée Poussin est tout neuf. Bien qu'il se soit développé avec une rapidité surprenante, il est loin d'être épuisé et il doit être particulièrement signalé aux débutants. Le Livre de M. de la Vallée Poussin fournira certainement à plusieurs d'entre eux l'occasion d'un premier travail.

Il s'agit de la représentation approchée des fonctions continues par des polynomes ou par des suites trigonométriques finies.

M. Borel a déjà abordé ce sujet dans un des Livres de la même Collection [1]; mais il s'était borné à l'exposition des résultats de Tchebycheff et de Weierstrass, qui vont servir de points de départ à la nouvelle théorie et que je vais tout d'abord rappeler en introduisant les dénominations employées par M. de la Vallée Poussin.

$f(x)$ étant une fonction continue donnée et $P(x)$ un polynome, l'*approximation* de $f(x)$ par $P(x)$ est le maximum de $|f(x) - P(x)|$ dans l'intervalle que l'on considère. Si un polynome $\pi_n(x)$ de degré n fournit une approximation ρ_n meilleure que celle fournie par tout autre polynome de même degré, ρ_n et π_n sont dits respectivement l'*approximation minimum* et le *polynome d'approximation minimum* d'ordre n. Des définitions analogues, relatives à l'approximation trigonométrique, s'obtiennent en remplaçant $P(x)$ par une suite trigonométrique d'ordre n

$$A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \ldots + A_n \cos nx + B_n \sin nx.$$

Des travaux de Tchebycheff [2], mis au point par M. Kirschberger et par M. Borel, il résulte qu'à chaque valeur de n correspond un polynome d'approximation minimum $\pi_n(x)$, et naturellement un seul d'après la définition même, et qu'il existe $n+2$ valeurs croissantes de x, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ pour lesquelles $f(x) - \pi_n(x)$ prenne alternativement les valeurs $+\rho_n$ et $-\rho_n$ (ou $-\rho_n$ et $+\rho_n$), ρ_n étant l'approximation minimum d'ordre n. On a un énoncé analogue pour l'approximation trigonométrique [3].

---

[1] *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynomes;* voir aussi, dans la même Collection, les *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, de M. Montel.

[2] Tchebycheff, *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg : Sciences mathématique et physique*, 6e série, t. VII, 1859; *Œuvres*, t. I). — Kirschberger, *Ueber Tchebycheff Annaherungsmethode* (*Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1902). — Borel (*voir* la note précédente).

[3] Tchebycheff a fait lui-même allusion à la possibilité de remplacer dans ses recherches les polynomes par d'autres fonctions. Le cas de l'approximation par des suites trigonométriques a été mis au point par M. M. Fréchet (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1908) et par M. J.-W. Young (*Transactions of the Ann. Math. Soc.*, 1907), qui étudie aussi le cas de l'approximation par des fonctions dépendant linéairement de paramètres.

Pour compléter ce petit historique, j'ajoute que le cas des fonctions de plusieurs variables, fort différent du cas où il n'y a qu'une variable, a été abordé par M. L. Tonelli (*Annali di Matematica*, 1908).

Les travaux bien connus de Weierstrass [1] ont prouvé, qu'en prenant n assez grand, on peut toujours trouver un polynome ou une suite trigonométrique donnant une approximation ρ aussi petite que l'on veut; donc que ρ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Dans son Livre, M. de la Vallée Poussin recherche *l'ordre de grandeur de l'infiniment petit ρ_n considéré comme fonction de* $\frac{1}{n}$ ou, d'une façon plus précise, il étudie la question suivante : *Peut-on fixer l'ordre de grandeur de l'approximation minimum, polynomiale ou trigonométrique, ρ_n d'une fonction $f(x)$ quand on connaît certaines propriétés différentielles de cette fonction et, inversement, quand on connaît l'ordre de grandeur de ρ_n, peut-on en déduire des propriétés différentielles de $f(x)$?*

A ces deux parties de la question correspondront des théorèmes que M. de la Vallée Poussin distingue en les qualifiant respectivement de « directs » et de « réciproques ».

Cette question se pose tout naturellement; le théorème de Weierstrass nous permet de remplacer toujours la considération d'une fonction continue $f(x)$ par celle d'une série absolument et uniformément convergente S de polynomes et inversement. Mais, pour que nous ne perdions rien à une telle substitution, il faut, si nous connaissons sur $f(x)$ une propriété autre que sa continuité, que nous sachions la traduire en une propriété de S et, inversement, que nous sachions traduire en propriétés de $f(x)$ les propriétés autres que la convergence absolue et uniforme que nous connaissons sur S.

Quand on reste dans le domaine des séries S très générales, les seules propriétés de S qui se présentent à l'esprit, les seules en tout cas qui aient été étudiées jusqu'ici, sont relatives à la rapidité de la convergence de S, c'est-à-dire à l'ordre de grandeur de ρ_n. Quant aux propriétés différentielles de $f(x)$, c'est à l'existence des dérivées jusqu'à un certain ordre que l'on pense tout d'abord, mais, en réalité, la condition de Lipschitz

$$|f(x+h)-f(x)| < Ah^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leq 1),$$

---

(1) WEIERSTRASS, *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen* (*Sitz. d. K. Pr. Ak. d. Wiss.*, 1885; *Werke*, Bd III). — *Voir* aussi dans les *Acta mathematica*, t. VI et VII, 1885, des travaux de M. Runge qui l'ont conduit presque en même temps aux mêmes résultats.

n'est pas moins importante et s'impose tout autant à l'attention. Non seulement parce qu'elle joue un rôle essentiel dans des questions où interviennent les séries polynomiales ou trigonométriques comme l'intégration des équations différentielles, mais aussi parce qu'on ne peut pas calculer une limite supérieure du reste d'un développement en série d'une fonction $f(x)$ sans être conduit à faire une hypothèse sur la rapidité de la décroissance avec h du maximum, pour x variable, de la différence $|f(x+h)-f(x)|$ que M. de la Vallée Poussin appelle *module de continuité* de $f(x)$; il le représente par $\omega(h)$. Or, l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur l'ordre de cet infiniment petit, fonction de h, est celle qui se traduit par l'inégalité de Lipschitz,

$$\omega(h) < A h^{\alpha}.$$

C'est d'ailleurs exactement de cette manière que Lipschitz, au cours d'un calcul destiné à évaluer l'ordre de grandeur du reste d'une série de Fourier, a été conduit à écrire pour la première fois la condition qui porte maintenant son nom. Ce Mémoire de Lipschitz est en quelque sorte le premier en date se rapportant à la question étudiée par M. de la Vallée Poussin [1].

Si la condition de Lipschitz et la dérivabilité se sont imposées à

---

[1] Le Mémoire de Lipschitz, écrit en latin, a été publié dans le *Journal de Crelle*, Bd LXIII, 1864; une traduction française, due à M. Montel, est parue dans les *Acta mathematica*, t. XXXVI, 1912.

Le résultat de Lipschitz a été précisé par Ulisse Dini (*Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, p. 49. Tipografia T. Nistri. Pisc, 1880) et par M. Phragmén; voir un extrait d'une lettre de cet Auteur dans un Mémoire de M. Mittag-Leffler (*Acta mathematica*, t. XXIV, 1901, p. 230).

J'ai eu moi-même l'occasion de reprendre les calculs de Lipschitz (*Bull. de la Soc. math. de Fr.*, t. XXXVIII, 1910).

M. Phragmén insiste sur le grand intérêt du resultat de Lipschitz qu'il qualifie, avec raison à mon avis, de plus utile et de plus élémentaire que celui de Dirichlet.

Ce que j'ai dit dans le texte montre que la condition de Lipschitz s'impose à l'esprit et qu'il en est de même de la fonction $\omega(h)$. Si cette fonction ne figure pas explicitement dans le Mémoire de Lipschitz, elle est introduite explicitement dans les énoncés de Dini et de M. Phragmén et j'ai été amené aussi à la considérer. C'est par inadvertance que M. de la Vallée Poussin ne fait remonter qu'à M. Dunham Jackson, page 66, l'introduction de cette fonction et, page 25, la méthode qui permet de déduire d'un résultat relatif au cas $\omega(h) < A h$ un résultat valable pour tout module $\omega(h)$. La fonction $\omega(h)$ joue un rôle essentiel dans les travaux d'Arzelà et d'Ascoli sur les fonctions également continues.

l'attention dès le début, seul le développement de la théorie a montré que la considération de ces deux propriétés différentielles suffisait pour établir une théorie cohérente conduisant à des théorèmes ayant une réciproque exacte, tels que le suivant, généralisation heureuse de résultats de M. Dunham Jackson et de M. Serge Bernstein, donné par M. de la Vallée Poussin à la page 72 :

Si, dans un intervalle (a, b), $f(x)$ *possède une dérivée continue d'ordre* r *qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* α, $(0 < \alpha < 1)$, *alors, quel que soit* n, $f(x)$ *peut être représenté par un polynome de degré* $\leqq n$ *avec une approximation*

$$\rho_n < \frac{M}{n^{r+\alpha}} \qquad (M = \text{const.}).$$

Réciproquement, si l'on peut vérifier cette condition, quel que soit n, *alors* $f(x)$ *admet, dans tout intervalle intérieur à* (a, b), *une dérivée continue d'ordre* r *qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* α [1].

Un énoncé entièrement analogue est applicable au cas de l'approximation trigonométrique. Une remarque, due à M. Bernstein, permet d'ailleurs de montrer très simplement l'identité des problèmes posés par les deux modes d'approximation :

On peut évidemment se borner aux fonctions de x, définies dans -1, $+1$. Posons $x = \cos\varphi$; alors, de $f(x)$, on déduit la fonction périodique paire

$$g(\varphi) = f(\cos\varphi).$$

D'un polynome $F(x)$, approché de $f(x)$, on déduira la suite d'ordre n

$$G(\varphi) = F(\cos\varphi),$$

---

[1] M. Montel (*Bull. de la Soc. math. de Fr.*, 1919) a donné un énoncé identique à celui du texte, à cela près que la condition relative à l'existence d'une dérivée d'ordre r satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α y est remplacée par la condition qu'il existe des dérivées généralisées de Liouville pour tous les ordres inférieurs à $r + \alpha$. M. de la Vallée Poussin conclut de là l'identité de ces deux propriétés différentielles; identité antérieurement reconnue par M. Hermann Weyl (*Vierteljahrschift de Zurich*, 1917).

approchée de $g(\varphi)$ avec la même approximation. Réciproquement de la suite d'ordre n, $G_1(\varphi)$, approchée de $g(\varphi)$, on déduira d'abord la suite paire

$$G(\varphi) = \frac{1}{2}[G_1(\varphi) + G_1(-\varphi)],$$

puis la fonction

$$F(x) = G(\arccos x),$$

approchée de $f(x)$ avec la même approximation et $F(x)$ est un polynome d'ordre n parce que $\cos(p \arccos x)$ est un polynome d'ordre p; ce polynome, considéré autrefois par Tchebycheff, est appelé par M. Bernstein le « polynome trigonométrique d'ordre p ».

Grâce à cette remarque, M. de la Vallée Poussin déduit les énoncés relatifs aux deux modes d'approximation de l'étude de la représentation trigonométrique des fonctions. La série de Fourier, étudiée au Chapitre I, fournit une suite d'ordre n donnant une approximation inférieure à $M\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n$ (ici, et dans la suite, M est une constante). C'est, en somme, le résultat de Lipschitz.

Le facteur $\log n$ provient de ce que le reste d'ordre n de la série de Fourier d'une fonction, inférieure en module à A, peut atteindre une valeur de la forme $MA \log n$, ce qui est lié, comme on sait, à l'existence de fonctions continues ayant une série de Fourier divergente. Pour avoir une meilleure approximation, il va donc falloir s'adresser à un développement trigonométrique toujours convergent; le plus simple est celui qu'a obtenu M. Fejér en appliquant à la série de Fourier la méthode de sommation par les moyennes arithmétiques, due à M. Cesarò. Au Chapitre II, ce procédé fournit une approximation au moins égale à

$$M\omega\left(\frac{2}{n}\right)\log\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right)\right];$$

pour le cas de $\omega(h) \leqq Ah^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, on obtient $M\frac{A}{n^\alpha}$. Mais, pour faire disparaître dans tous les cas $\log\left[\omega\left(\frac{2}{n}\right)\right]$, il faut recourir à des procédés de représentation plus compliqués; M. de la Vallée Poussin utilise, comme M. Dunham Jackson, des combinaisons linéaires des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{2r} dt,$$

généralisations de celle qui exprime la somme de Fejér de la série de Fourier de $f(x)$.

Ceci le conduit, au Chapitre III, à des théorèmes *directs* tels que celui que j'ai cité.

Reste à obtenir les *réciproques*. La démonstration est essentiellement basée sur la remarque suivante, extrêmement importante dans toute question où l'on a à étudier la dérivation terme à terme de séries polynomiales ou trigonométriques [1] : lorsque l'on connaît une limite supérieure du module d'un polynome ou d'une suite d'ordre n dans un intervalle, on en peut déduire une limite supérieure du module d'une quelconque de ses dérivées.

Précisant un résultat de M. Bernstein, M. de la Vallée Poussin démontre, par un procédé très élégant, que si le module d'une suite d'ordre n ne surpasse pas L, le module de sa dérivée ne surpasse pas nL. On comprend que si, partant de là et s'appuyant sur l'ordre de ρ_n pour une fonction $f(x)$, on a pu écrire

$$f(x) = T_1 + T_2 + \ldots + T_n + \ldots,$$

T_n étant une suite d'ordre n et la convergence uniforme et absolue étant assez rapide, on puisse en déduire la convergence uniforme de la série des dérivées $k^{\text{ièmes}}$, c'est-à-dire l'existence des dérivées de $f(x)$ jusqu'à l'ordre k.

De plus, la même propriété permet de déduire de la connaissance du module de chaque terme T_n, ou $\frac{d^k T_n}{dx^k}$, une limite supérieure du module de continuité de ce terme et par suite une limite supérieure du module de continuité de la somme de la série des T_n, ou des dérivées $k^{\text{ièmes}}$.

Ce procédé de démonstration est employé au Chapitre IV. Le Chapitre V est relatif au passage de l'approximation trigonométrique à l'approximation polynomiale.

Cette analyse manquerait de franchise si je cachais l'impression que le Chapitre IV m'a faite. M. de la Vallée Poussin a adopté partout une rédaction résolument synthétique ; cela entraîne toujours un auteur à quelques habiletés que les gens du métier

---

[1] C'est ainsi que M. Montel (*loc. cit.*) indique un Mémoire de M. Dulac, *Sur les séries de Maclaurin à plusieurs variables* (*Acta mat.*, t. XXXI, 1908), comme contenant le premier énoncé de la nature de ceux qu'il utilise dans ses recherches sur l'approximation.

saluent au passage. Par exemple, au premier paragraphe du premier Chapitre de ce Livre où il ne sera question que de la plus ou moins rapide convergence d'une suite trigonométrique φ_n vers une fonction f, M. de la Vallée Poussin ne parle nullement de la convergence de φ_n vers f, mais il se propose d'étudier le minimum de $\int_0^{2\pi} (f - \varphi_n)^2 dx$, bien qu'à aucun moment on ne parlera de la méthode des moindres carrés; et c'est de là que sont déduites les définitions des constantes de Fourier, de la série de Fourier, de la somme de Fourier d'ordre n. Cela, parce qu'il peut ainsi abréger quelque peu sa rédaction tout en préparant l'exposition d'un résultat important de M. Bernstein.

De telles habiletés sont sans inconvénients réels; il suffit que le lecteur soit un peu docile. S'il consent à se laisser conduire par M. de la Vallée Poussin il apprendra vite et beaucoup. Mais, au Chapitre IV, la docilité doit devenir toute particulière. M. de la Vallée Poussin a réussi à construire un énoncé qui réunit tous les résultats acquis et permet d'aller plus loin. Cet énoncé sera très apprécié de ceux qui, ayant lu les Mémoires antérieurs, seront amenés à lui par généralisations successives, mais il me paraît regrettable d'en avoir fait le début d'un Chapitre et d'en avoir tout déduit. On peut lire sans crainte ce Chapitre, très clair comme tout le Livre, on le comprendra pas à pas; et cependant, pour bien goûter l'énoncé de M. de la Vallée Poussin, pour saisir comment et pourquoi il a été construit, pour le bien comprendre en un mot, il faudra, après avoir fini le Chapitre, le relire en commençant par la fin. M. de la Vallée Poussin arrive au but plus vite que ses devanciers, il va plus loin qu'eux et en donnant à des calculs, très rébarbatifs au début, une simplicité qu'il sera bien difficile d'accroître encore; mais il y réussit parce qu'aux idées de MM. Jackson et Bernstein, il surajoute les siennes, et c'est demander beaucoup au Lecteur que de lui demander de tout comprendre d'un coup.

Dans sa Préface, M. de la Vallée Poussin s'excuse de ce que sa rédaction synthétique ne lui ait pas toujours permis de délimiter exactement la part de chaque Auteur. Ce n'est pas à ce point de vue que je me place; M. de la Vallée Poussin donne d'ailleurs beaucoup d'indications bibliographiques et le lecteur pourrait

toujours se reporter à la conférence que M. de la Vallée Poussin a faite à la Société mathématique suisse, le 24 février 1918 (*Enseignement mathématique*, t. XX, n° 1, 1918). Mais une exposition plus analytique, qui aurait davantage suivi l'ordre historique par cela même, aurait peut-être mieux fait apprécier la beauté de l'œuvre accomplie. Seulement, une telle exposition aurait été plus longue et, à cause des tarifs de publication actuels, M. de la Vallée Poussin a dû, sans doute, s'imposer par-dessus tout l'obligation d'être court.

Les Chapitres VI et VII traitent de l'approximation minimum, polynomiale et trigonométrique. C'est là qu'on trouve les résultats de Tchebycheff dont j'ai parlé, exposés par la méthode de M. Borel et aussi grâce à un mode de raisonnement dû à M. de la Vallée Poussin et qui va jouer un rôle très important dans la suite. J'ai rappelé que si π_n de degré n est d'approximation minimum pour $f(x)$, il y a $n+2$ valeurs $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+2}$ pour lesquels $\pi_n(x)$ prend les valeurs $f(a_1)+\varepsilon_n$, $f(a_2)-\varepsilon_n$, $f(a_3)+\varepsilon_n$, ...; ε_n étant, au signe près, l'approximation minimum ρ_n. Il suit de là que la connaissance de $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ et de $f(a_1), \ldots, f(a_{n+2})$ suffit pour déterminer $\pi_n(x)$ et ε_n, donc ρ_n. Supposons donnée $f(x)$ et prenons arbitrairement des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}$; déterminons ε et $\pi(x)$, de degré n, tels que l'on ait

$$\pi(\alpha_1) = f(\alpha_1) + \varepsilon, \qquad \pi(\alpha_2) = f(\alpha_2) - \varepsilon, \qquad \ldots$$

$\pi(x)$ sera le polynome d'approximation minimum de $f(x)$, considéré seulement pour les valeurs $x = \alpha_i$, et $\rho = |\varepsilon|$ sera l'approximation minimum pour cet exemple de valeurs α_i. Ceci n'est pas une simple dénomination, mais exprime ce fait mathématique, facile à vérifier, que tout autre polynome de degré n diffère de $f(x)$ de plus de ρ en l'un des points α_i. Faisons varier maintenant le groupe A des points α_i, quand ρ sera maximum nous aurons les points a_i, donc π_n et ρ_n.

Or la recherche de ρ et π, pour A donné, est un problème d'algèbre relativement simple et qui conduit M. de la Vallée Poussin à des remarques telles que celle-ci : si, par un procédé quelconque, on a trouvé un polynome P de degré n, donnant aux points d'un groupe A de $n+2$ points des valeurs approchées alternativement par défaut et par excès, l'approximation minimum pour A sera

comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs absolues de ces erreurs. Si donc l est la plus petite valeur absolue, l sera *a fortiori* inférieure à l'approximation minimum ρ_n dans l'intervalle (a, b) considéré; mais, d'autre part, le maximum L de $|f(x) - P(x)|$ dans (a, b) est une limite supérieure de f_n; donc, on a

$$l \leqq \rho_n \leqq L.$$

Quand on aura été assez habile pour choisir A de façon que l et L soient du même ordre infinitésimal, l'ordre de ρ_n sera par cela même connu.

Avec les Chapitres VIII, IX et X nous revenons à la question traitée dans les Chapitres I à V : ordre de l'approximation pour les fonctions possédant une propriété différentielle donnée et inversement. Mais les fonctions étudiées maintenant sont indéfiniment dérivables. Le théorème que j'ai cité donne, exprimé à l'aide de l'ordre de grandeur de ρ_n, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des dérivées de tout ordre : ρ_n doit être asymptotiquement plus petit que $\frac{1}{n^p}$, quel que soit l'entier p. Il faut maintenant étudier des familles spéciales de fonctions indéfiniment dérivables. La plus simple, la plus intéressante est naturellement la famille des fonctions analytiques.

Supposons donc $f(x)$ analytique et sans point singulier sur $(-1, +1)$, extrémités comprises; la fonction $g(\varphi)$, que nous en avons déduite, sera holomorphe au voisinage de l'axe des ξ, $(\varphi = \xi + i\eta)$; elle sera holomorphe dans une bande limitée par deux droites $\eta = b_1$, $\eta = -b_2$. Faisons encore la transformation $z = e^{i\varphi}$, classique dans l'étude des fonctions de période 2π; $g(\varphi)$ devient $h(z)$, $h(z)$ étant holomorphe dans la couronne

$$e^{-b_2} < |z| < e^{b_1}.$$

A la série de Fourier de $g(\varphi)$ correspond, nous le savons, un développement en série de polynomes trigonométriques pour $f(x)$ et, pour $h(z)$, un développement en série de Laurent. Si donc nous reprenons la question traitée au Chapitre I, c'est-à-dire l'ordre de grandeur de l'approximation fournie par les premiers termes de la série de Fourier de $g(\varphi)$, nous aurons à étudier la rapidité de la convergence d'une série de Laurent sur $|z| = 1$. Les résultats

de Darboux et de M. Hadamard nous apprennent que cette rapidité dépend de la position des points singuliers les plus voisins de $|z| = 1$; il faut considérer le module le plus petit des points singuliers de modules plus grands que 1 et l'inverse du module le plus grand des points singuliers de modules plus petits que 1, c'est-à-dire le plus petit b des deux nombres b_1 et b_2 [1]. Nous savons aussi que, pour préciser davantage la rapidité de la convergence, il faudra connaître la partie principale en ces points singuliers. Les classes de fonctions que l'on est ainsi conduit à considérer sont celles pour lesquelles M. de la Vallée Poussin étudie l'ordre de ρ_n. Au Chapitre VIII, il s'occupe des fonctions pour lesquelles les points singuliers qui interviennent sont des pôles $\left(\text{partie principale } \frac{A}{(a-z)^n}\right)$. Au Chapitre IX, les fonctions pour lesquelles les points sont points critiques d'ordre s $\left(\text{partie principale de la forme } \frac{A}{(a-z)^s}\right)$ et des points logarithmiques $\left(\text{partie principale } \frac{[\log(a-z)]^m}{(a-z)^s}\right)$. Au Chapitre X, il s'agit du cas des fonctions entières; alors l'ordre de la meilleure approximation est lié, comme on pouvait s'y attendre, à l'ordre de croissance de la fonction. D'une façon précise, c'est, pour $g(\varphi)$, l'ordre de croissance, pour η croissant indéfiniment, qui intervient.

Voici, à titre d'exemple, quelques résultats extraits du Chapitre VIII. Si $g(\varphi)$ est holomorphe dans la bande limitée par les droites $\eta = \pm b$, on a, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\rho_n \leqq M e^{n(b-\varepsilon)};$$

si, de plus, les seuls points singuliers sur les droites $\eta = \pm b$ sont des pôles d'ordre r au plus, on a

$$\rho_n \leqq M n^{r-1} e^{-nb}.$$

Et, comme exemple de propriété *réciproque* :

Si $g(\varphi)$, de période 2π, admet une approximation

$$\rho_n < \psi(n) e^{-nb},$$

---

[1] D'ailleurs, pour $f(x)$ réelle, $g(\varphi)$ est réelle et $b_1 = b_2$.

$\psi(n)$ étant non décroissante, $g(\varphi)$ est holomorphe dans la bande limitée par $\eta = \pm b$. Si, de plus, on sait que $\psi(n) = n^{r-1}\chi(n)$, où $\chi(n)$ tend vers zéro et que $g(\varphi)$ n'a que des pôles sur $\eta = \pm b$, ceux-ci sont d'ordre plus petit que r.

Dans ces énoncés, ρ_n est relatif à l'approximation trigonométrique; pour passer à l'approximation polynomiale on revient à la fonction $f(x)$ par la transformation $x = \cos\varphi$; alors à la bande $\eta = \pm b$ correspond l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{X^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{Y^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1 \qquad (x = X + iY).$$

Les théorèmes *directs* résultent du simple examen de la série de Fourier de $g(\varphi)$, donc de la série de Laurent de $h(z)$ [1]. Pour le cas de $g_1(\varphi)$ holomorphe dans $(-b, +b)$, limites comprises, on calcule l'ordre des coefficients de ces séries, d'où l'ordre de grandeur du reste. Puis, pour passer au cas des singularités étudiées, il faut poser

$$g(\varphi) = g_1(\varphi) + g_2(\varphi),$$

$g_2(\varphi)$ donnant les parties principales aux points singuliers. On étudie pour cela aux Chapitres VIII et IX les séries de Fourier des fonctions

$$\frac{A}{(a - e^{i\varphi})^n}, \quad \frac{A}{(a - e^{i\varphi})^s}, \quad \frac{[\log(a - e^{i\varphi})]^m}{(a - e^{i\varphi})^s},$$

qui ont les mêmes parties principales que les fonctions obtenues en faisant la transformation $z = e^{i\varphi}$ dans les parties principales en z; chacun de ces *éléments simples* en φ est périodique et admet tous les points singuliers provenant d'un point singulier $z = a$.

En somme, jusqu'ici, la méthode est la même que précédemment; elle est même plus simple, car il suffit de s'adresser aux développements fournis par la série de Fourier, et non à ceux plus compliqués du Chapitre III, et de majorer ces développements en remplaçant chaque terme par son module maximum. Voyons les théorèmes réciproques.

---

[1] On peut dire qu'ils ne diffèrent pas des théorèmes *directs* relatifs à la série de Taylor, au contraire il y aurait lieu de comparer les théorèmes *réciproques* de MM. Bernstein et de la Vallée Poussin aux théorèmes *réciproques* de Darboux et de M. Hadamard.

Le premier est celui qui affirme l'analyticité et l'holomorphie entre $-b$ et $+b$ lorsque ρ_n est plus petit que $\psi(n)e^{-nb}$; il s'obtient comme précédemment : Une série de suites trigonométriques des degrés 1, 2, ... représente $g(\varphi)$ pour φ réel, son $n^{\text{ième}}$ reste est majoré par ρ_n; de là résulte que cette série est dérivable terme à terme indéfiniment. D'où l'existence des dérivées $g'(\varphi)$, $g''(\varphi)$, ... pour φ réel et, en même temps, des bornes de la valeur absolue de ces dérivées qui permettent d'affirmer que la série de Taylor de $g(\varphi)$ procédant suivant les puissances de $\varphi - \varphi_0$ a un cercle de convergence au moins égal à b, quand φ_0 est réel.

Cette série de Taylor permet d'avoir une limite supérieure du module de $g(\varphi)$; si donc on peut démontrer que $|g(\varphi)|$ est asymptotiquement inférieur à $\frac{M}{(\eta - b)^r}$, pour $\eta > 0$, quel que soit M, et qu'en même temps on sache que les seuls points singuliers de $g(\varphi)$ sur $\eta = b$ sont des pôles, on pourra affirmer que ces pôles sont d'ordre inférieur à r. C'est donc sans l'emploi d'idées vraiment nouvelles que l'on obtient l'énoncé que j'ai donné; mais ce théorème peut aussi être obtenu par une méthode très différente, et qui sera la seule employée au Chapitre IX.

Supposant que $g(\varphi)$ n'ait que des pôles sur $\eta = \pm b$, je pose

$$g(\varphi) = g_0(\varphi) + \Sigma A\, g_1(\varphi) + \Sigma B\, g_2(\varphi) + \ldots;$$

$g_0(\varphi)$ est holomorphe dans la bande considérée, frontières comprises; les A, B, ..., sont des constantes, les fonctions $g_1(\varphi)$, $g_2(\varphi)$, ... sont des éléments simples de la forme

$$\frac{1}{(\cos\varphi - a)}, \quad \frac{1}{(\cos\varphi - a)^2}, \quad \ldots,$$

chacun d'eux ne dépend donc que d'un seul paramètre a.

Or, M. Bernstein a réussi à trouver l'ordre de grandeur de ρ_n pour chacune des fonctions g_0, g_1, ...; cela suffit pour énoncer la partie *directe* de l'énoncé que j'ai rappelé. Il a même réussi à former la valeur asymptotique de ρ_n pour l'élément simple g_p correspondant à une série de pôles d'ordre p ($\varphi = \arccos a$); il résulte de cette expression que l'ordre infinitésimal de ρ_n va en décroissant quand p croît et de plus que cet ordre est le même pour un élément simple d'ordre p et pour la somme de plusieurs éléments simples d'ordre p; d'où la partie *réciproque* de l'énoncé. L'intro-

duction de cette nouvelle méthode, qui utilise les recherches de M. de la Vallée Poussin sur l'approximation minimum, explique la place, un peu étrange au premier abord, qu'occupent les Chapitres qui traitent de cette approximation; on peut dire qu'avant ces Chapitres, la méthode était celle de M. Dunham Jackson et qu'après, c'est celle de M. Bernstein.

Il est étonnant que ces deux Savants, écrivant au même moment sur le même sujet, soient arrivés à deux Mémoires si différents; il est vrai qu'ils ont travaillé d'une façon entièrement indépendante. C'est en 1908 que j'ai soulevé la question du calcul de l'ordre de l'approximation pour une famille donnée de fonctions; l'importance des travaux qui ont été écrits sur ce sujet explique que j'aie plaisir à le rappeler. Je l'ai fait à l'occasion d'une intégrale signalée par M. Landau et qui me paraissait propre à aborder le problème ([1]). A l'occasion de la même intégrale, M. de la Vallée Poussin s'était posé, de son côté, la même question et dès 1908 il publiait deux Mémoires importants sur le sujet, bientôt suivis, en 1910, d'un troisième dont je parlerai dans un moment ([2]). Les résultats obtenus attirèrent l'attention de M. Landau qui fit mettre la question comme sujet de prix par la Faculté des Sciences de Göttingue pendant que M. de la Vallée Poussin faisait proposer le même sujet de prix par l'Académie de Bruxelles. Ce fut l'occasion des Mémoires de MM. Jackson et Bernstein ([3]).

([1]) LANDAU, *Ueber die Approximation einer stetigen Function durche einer ganze rationale Function* (*Rendiconti de Palerme*, t. XXV, 1908). — LEBESGUE, *Sur la représentation approchée des fonctions* (*Ibid.*, t. XXVI, 1908). Je ne suis revenu sur la question que dans l'article cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*, et, incidemment, dans un Mémoire : *Sur les intégrales singulières* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 3e série, t. I, 1910).

([2]) DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur l'approximation des fonctions de variable reelle, etc.* (*Bull. de l'Ac. Roy. de Belg.*, Classe des Sciences, 1908); *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes* (*Ibid.*, 1908); *Sur les polynomes d'approximation* (*Ibid.*, 1910).

([3]) D. JACKSON, *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Functionen durche ganze rationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung* (*Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1911). Voir aussi un article de M. Jackson dans les *Transactions of the Am. Math. Soc.*, 1912; S. BERNSTEIN, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes* (*Mémoires publiées par l'Ac. Roy. de Belg.*, 1912).

Voir aussi du même auteur une Note (*Comptes rendus*, 26 novembre 1912), et un Mémoire paru aux *Acta mathematica* en 1913.

M. Jackson s'est occupé surtout des théorèmes directs et M. Bernstein presque uniquement des théorèmes réciproques, ce à quoi le préparait si bien ses travaux antérieurs; presque tous les théorèmes réciproques sont de M. Bernstein. Mais, par contre, M. Bernstein s'est borné à la considération de la série de Fourier pour obtenir des théorèmes directs et si, comme je l'ai dit, cela suffit pour les fonctions analytiques, cela ne suffit plus pour les fonctions non indéfiniment dérivables.

Au Congrès international de 1912, M. Bernstein a confronté les théorèmes directs et réciproques; c'est ce que M. de la Vallée Poussin vient de faire de nouveau dans son Livre, après avoir complété les deux espèces d'énoncés. On comprend que, dans son Livre, M. de la Vallée Poussin s'arrête après les théorèmes directs du Chapitre III, parce qu'il obtient au Chapitre IV des réciproques presque parfaites de ces théorèmes; mais comment M. Jackson, qui ne s'occupait que de théorèmes directs, reconnaissait-il qu'il avait obtenu le bon ordre de grandeur pour l'approximation? — Grâce à des exemples prouvant que, pour des fonctions de la classe considérée, l'ordre de l'approximation ne pouvait plus être abaissé [1].

En rapprochant deux résultats du Chapitre I, les lecteurs de M. de la Vallée Poussin pourraient d'ailleurs, sans recourir aux réciproques du Chapitre IV, se rendre compte que les ordres obtenus au Chapitre III ne peuvent pas être améliorés :

Pour une fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α on trouve, au Chapitre I, que l'approximation donnée

---

[1] Il importe de remarquer que si les théorèmes réciproques sont beaucoup plus utiles que les exemples de M. Jackson, ils ne les remplacent cependant pas complètement parce que les réciproques ne sont pas toujours exactes : Ainsi, avec la condition de Lipschitz d'ordre 1, $\omega(\delta) < K\delta$, on trouve $\varphi_n = \frac{M}{n}$; mais, en ce qui concerne le théorème réciproque, cette dernière égalité ne permet que de conclure $\omega(\delta) < K\delta\,|\log\delta|$.

Dès lors, on est en droit de se demander, quand on a trouvé la limite $\frac{M}{n}$, s'il est possible ou non de l'améliorer. Un exemple de M. Jackson prouve que cela est impossible. M. Bernstein a obtenu de son côté un résultat équivalent au point de vue actuel et même beaucoup plus précis, car il a prouvé que, pour la fonction $|x|$, φ_n est de l'ordre de $\frac{M}{n}$.

par la série de Fourier est limitée par $M \frac{\log n}{n^\alpha}$ et, de la démonstration même, il résulte sans peine que cette limite est effectivement atteinte pour une fonction $\varphi(x)$ de la famille; or, un autre résultat du même Chapitre nous apprend qu'il suffit de diviser le $n^{\text{ième}}$ reste de la série de Fourier de $\varphi(x)$ par $M' \log n$ pour avoir une limite inférieure de la meilleure approximation d'ordre n. Donc, pour $\varphi(x)$, on a $\rho_n \geqq \frac{M}{M'} \frac{1}{n^\alpha}$ et comme, au Chapitre III, on trouve $\rho_n \leqq \frac{M''}{n^\alpha}$, cette limite ne peut être améliorée. Dans ce mode de raisonnement, qui ne nous donne pas les théorèmes réciproques ([1]), on n'opère plus comme précédemment sur la classe des fonctions considérées, on s'efforce de s'approcher au mieux d'une fonction déterminée et, ce qui est essentiel, c'est la possibilité d'obtenir une limite inférieure de ρ_n. On trouvera un grand nombre de telles limites dans le Livre de M. de la Vallée Poussin. Celle que je viens d'utiliser n'est citée ici que pour permettre une exposition plus claire du mode de raisonnement utilisé dans la suite.

Jusqu'ici l'idée de limite inférieure de l'approximation d'ordre n suffit, les résultats de Tchebycheff sur l'approximation minimum n'interviennent pas. C'est M. de la Vallée Poussin qui, dans son Mémoire de 1910, a osé le premier utiliser ces résultats et effectuer le calcul approché de $\pi_n(x)$ et de ρ_n, par les procédés que j'ai indiqués en parlant du Chapitre VI, pour le cas très important de la fonction $|x|$ qui, comme on sait, peut être considérée comme l'élément simple à partir duquel se construisent toutes les fonctions continues ([2]). La méthode de M. de la Vallée Poussin, c'est-à-dire le calcul approché de $\pi_n(x)$, ne peut, il semble, être tenté que pour des fonctions très particulières. M. Bernstein, qui a suivi la voie

---

([1]) La première classe de fonctions pour laquelle l'ordre de ρ_n a été déterminé est celle des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz-Dini,

$$\lim \omega_{\delta=0}(\delta) \cdot |\log \delta| = 0;$$

on trouve

$$\lim_{n=\infty} \rho_n \log n = 0.$$

Ce résultat, qui a été obtenu par le mode de raisonnement du texte, n'impliquait pas la réciproque; elle est exacte cependant comme M. Bernstein l'a montré ensuite.

([2]) *Voir* un article *Sur l'approximation des fonctions* que j'ai publié dans ce *Bulletin* en 1898.

ouverte par M. de la Vallée Poussin, l'a utilisée pour $|x|$ et pour les principaux des éléments simples qu'on rencontre aux Chapitres VIII et IX.

Jusqu'à M. Bernstein, les résultats de Tchebycheff n'avaient pas été utilisés complètement; grâce, en particulier, à M. Borel, la notion de polynome d'approximation minimum avait été sauvée de l'oubli, mais on ne se rappelait guère que Tchebycheff avait effectivement déterminé de tels polynomes; savoir le polynome d'approximation minimum d'ordre $n-1$ pour la fonction x^n considérée dans $(-1, +1)$. C'est ce qui conduit Tchebycheff à ces polynomes que M. Bernstein appelle les polynomes trigonométriques et dont il a fait un puissant outil de recherches algébriques et analytiques dans un domaine où semblaient seuls utilisables les types ordinaires de raisonnement de la théorie générale des fonctions de variable réelle.

La méthode de M. de la Vallée Poussin supposait le choix de $n+2$ points α_i, M. Bernstein le fait toujours en utilisant les propriétés des polynomes trigonométriques et des remarques sur la variation du polynome d'approximation avec la fonction que je regrette de ne pouvoir indiquer de façon plus précise. C'est ainsi que, par une sorte de divination qui rappelle bien son illustre compatriote Tchebycheff, M. Bernstein trouve les polynomes d'approximation de $\frac{1}{z-a}$, puis, qu'il en déduit la valeur asymptotique de ρ_n pour les éléments simples des Chapitres VIII et IX.

Dans cette Analyse, je me suis laissé entraîner par la nouveauté du sujet à parler plus de la matière du Livre que de sa forme; mais qu'aurais-je pu dire qu'on ne sache déjà sur les talents d'exposition de M. de la Vallée Poussin?

Et s'il m'avait fallu indiquer ses contributions nouvelles à la théorie données par ce livre, il m'aurait fallu parler de presque tous les énoncés et de toutes les démonstrations. Je veux cependant signaler l'importance toute particulière des Chapitres consacrés à l'étude de l'approximation des fonctions analytiques.

H. Lebesgue.

LEWIS (C.-I.). — A Survey of Symbolic Logic. [Revue de la logique symbolique]; (*Semicentennial Publications of the University of California*, 1868-1918; Publications du Cinquantenaire de l'Université de Californie). 1 vol. in-8 jésus, VI-409 pages. University of California Press, Berkeley, 1918.

Cet Ouvrage fait partie des publications relatives au cinquantenaire de l'Université californienne. Il est bien digne de fixer l'attention en ce sens qu'il ne représente pas quelque nouvelle tentative logistique, mais que, comme l'indique le titre, il fait l'histoire de la logique symbolique et réexpose avec élégance tout ce qui mérite d'être conservé. Les formules logiques y sont sobres; l'auteur paraît bien connaître le danger des expositions où l'on ne veut voir que ces formules, à l'exclusion même du langage ordinaire. Pour lui, ce langage ne doit pas plus disparaître des traités de logique que des ouvrages mathématiques ou scientifiques quelconques; il insiste beaucoup sur ce que les problèmes logiques sont les problèmes de la vie habituelle en face desquels un logisticien se trouvera simplement mieux armé qu'un logicien ordinaire.

L'histoire paraît soigneusement faite et riche en bibliographie; comme noms intervenant d'une manière particulièrement saillante, on peut noter ceux de Bolzano, Boole, Burali-Forti, Cayley, Couturat, Dedekind, de Morgan, Frege, Grassmann, Halsted, Hamilton, Hilbert, Huntington, Jevons, Jourdain, Kempe, Ladd-Franklin, Lambert, Leibniz, Mac Coll, Mac Farlane, Moore, Murphy, Padoa, Peano, Peirce, Poincaré, Poretsky, Russell, Schröder, Shearman, Vailati, Venn, Whitehead.

Un premier point, bien digne d'être noté dans un bulletin français, est le grand cas que fait l'auteur du petit Ouvrage de Couturat: *L'algèbre de la logique* (Collection *Scientia;* Gauthier-Villars; 2e édition, 1914). Certes, savants et philosophes français n'ont point oublié l'homme érudit et aimable qui, en notre pays, était à peu près le seul de son époque à défendre, sur le terrain de la haute science, l'économie mentale pouvant provenir de l'usage des logiques symboliques et des linguistiques logiques, mais c'est presque une heureuse surprise que de voir M. C.-I. Lewis choisir, dans la forêt quasi inextricable des publications relatives à ces sujets, la centaine de pages due à Couturat, pour faire de « cet

admirable petit livre » une des plus importantes œuvres d'initiation. De la manière la plus sincère, nous pourrons rendre son amabilité à M. Lewis en disant que, précisément, la clarté et l'intérêt qui ont assuré le succès à Couturat se retrouvent ici, sans discontinuité, tout au long d'un volume cinq ou six fois plus étendu.

La logique mathématique doit naturellement dominer et redonner la mathématique ordinaire.

Pour Leibniz, les nombres premiers pouvaient être associés à des idées fondamentales; les nombres composés étaient alors des associations de ces idées premières (animal, 3; raisonnable, 7; homme, 21). Cette logique-là n'était que de l'arithmétique. Puis la logique se perfectionne comme le calcul; pour atteindre toutes les questions, elle prend tous les moyens. Elle fait appel aux schèmes géométriques, à l'espace vectoriel et jusqu'à la géométrie de situation. L'analyse combinatoire et le calcul des probabilités devaient aussi s'y insérer tout naturellement.

Insistons — car ceci est l'une des caractéristiques du présent Ouvrage, — sur les nombreux exemples de problèmes logiques empruntés à tous ordres d'idées, à la classification dans les sciences biologiques, à la jurisprudence, aux imbroglios historiques, etc.; ces problèmes sont traités, d'une part, par les formules et, de plus, sur des figures, par des représentations géométriques des plus suggestives. Non seulement ceci ne rappelle pas les abstractions si fatigantes de certains ouvrages, mais fait plutôt penser à des récréations mathématiques.

N'oublions pas non plus que l'appareil mathématique, après les formes arithmétique, algébrique, géométrique, etc. peut encore prendre la forme mécanique.

Gulliver, dans ses fameux voyages, rencontrait des gens qui, en mettant dans une machine des pions portant des lettres, en composaient des chefs-d'œuvre littéraires par le moyen d'un tour de manivelle. La logistique n'en promet pas tant, mais, science de calcul, il est bien naturel qu'elle ait ses machines à calculer.

On voit, par ces quelques citations faites assez au hasard, que l'Ouvrage de M. Lewis est d'un intérêt très grand et toujours soutenu. Aucun excès de zèle, aucun fanatisme pour le sujet; rien qu'une analyse habile et élégante avec tout ce qu'on pouvait y trouver de meilleur.

A. Buhl.

MÉLANGES.

SUR UN THÉORÈME DE A. LIAPOUNOFF;

PAR M. ALFRED ROSENBLATT.

1. Le célèbre mathématicien russe A. Liapounoff a démontré le théorème suivant [1] :

« Parmi tous les corps homogènes dont les points s'attirent en raison inverse du carré de leur distance et qui ont le même volume V, la sphère *seule* a la plus petite énergie potentielle, toutefois dans *l'hypothèse* qu'il existe une figure déterminée pour laquelle le minimum de l'énergie potentielle est atteint. »

Par énergie potentielle d'un corps K, on entend le produit par -1 de l'intégrale

$$I = \frac{1}{2}\int V\,d\tau, \tag{1}$$

V étant le potentiel du corps en un point x', y', z'; et $d\tau$ étant l'élément $dx\,dy\,dz$ du corps. La densité du corps est supposée égale à 1.

Liapounoff suppose que le corps, pour lequel le minimum de l'énergie potentielle est atteint, est un corps d'équilibre, c'est-à-dire que le potentiel V du corps est constant à la surface. Il montre alors qu'aucun corps différent de la sphère ne peut donner de minimum absolu.

Il montre aussi, dans le deuxième des deux travaux cités, que la

---

[1] *Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1904). — *Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation* (*Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 1908).

sphère donne, en effet, un maximum de l'intégrale (1), si on la compare aux corps suffisamment voisins.

Liapounoff se sert, dans sa démonstration, des propriétés d'une couche simple (couche électrique) étalée sur la surface S du corps en question et sans action en un point intérieur du corps. Il se sert donc des moyens de la théorie du potentiel newtonien. Ensuite, il suppose que, parmi toutes les surfaces des corps K qui entrent en comparaison, la sphère possède la plus petite surface. Or on sait que cette propriété du minimum de la sphère n'a été démontrée que récemment en toute rigueur et dans des suppositions générales [1].

Dans un travail récent [2], M. Lichtenstein a démontré que la sphère est la seule figure d'équilibre.

2. Nous nous proposons de démontrer le théorème de Liapounoff dans toute sa généralité. Nous démontrerons donc que, parmi tous les corps de volume V donné que l'on puisse s'imaginer, la sphère seule possède le maximum de l'intégrale. La démonstration ne fait pas appel à des considérations étrangères au sujet même du théorème, comme celles concernant les surfaces des corps.

Envisageons un ensemble E de points dans l'espace R_3. Nous supposerons cet ensemble : 1° borné, 2° mesurable au sens de M. Lebesgue. Divisons l'espace en cubes par une suite de divisions D_1, D_2, ... en subdivisant chaque fois les cubes obtenus dans la division précédente. Soient $\frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2$, les longueurs des côtés des cubes de ces divisions.

Envisageons les sommes

$$\sum_k = \sum_{\substack{i,j=1,2,\ldots,2^k n \\ (i \neq j)}} \frac{m(e_i^k)\, m(e_j^k)}{r_{ij}^k}, \tag{2}$$

en désignant par e_i^k l'ensemble des points de l'ensemble E situé dans

---

(1) Voir H. Poincaré. *Equilibre des masses fluides animées d'un mouvement de rotation*. Paris, 1902; voir aussi le travail de M. L. Tonelli, *Sulla proprietà di minimo della sfera* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 39, 1915).

(2) *Ueber einige Eigenschaften der Gleichgewichts figuren rotierender Flüssigkei ten* (Académie de Berlin, 1918).

le $i^{\text{ième}}$ cube de la $k^{\text{ième}}$ subdivision, et en nommant r_{ij}^k la distance des milieux des cubes K_i^k et K_j^k. En dehors des $2^k n$ cubes K_i^k, il n'y a pas de points de l'ensemble E.

On démontre facilement que la limite des sommes Σ_k pour k infini existe

$$\lim_{k=\infty} \sum_k = S. \tag{3}$$

Elle est indépendante du mode de division employé. C'est cette limite que nous appellerons *potentiel newtonien de l'ensemble* E.

On peut remplacer les ensembles e_i^k par des cubes $\overline{K}_i^k$ concentriques aux cubes K_i^k de côtés parallèles, de volume égal à la mesure $m(e_i^k)$. Les sommes

$$\overline{\sum}_k = \sum_{\substack{i,j=1,2,\ldots,2^k n \\ (i \neq j)}} \int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r_{ij}^k}. \tag{4}$$

dans lesquelles l'intégration est étendue aux deux cubes $\overline{K}_i^k$, $\overline{K}_j^k$ et dans lesquelles r_{ij}^k signifie la distance de deux points variables des deux cubes, tendent vers la même limite S, si k augmente indéfiniment.

Le potentiel newtonien S de l'ensemble E n'est autre chose que l'intégrale sextuple

$$I = \frac{1}{2}\int\int\int\int\int\int \frac{dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'}{r} \tag{5}$$

étendue à l'ensemble mesurable E de l'espace à six dimensions $x, y, z; x', y', z'$ que l'on forme en faisant correspondre à chaque paire de points $x, y, z; x', y', z'$ *ordonnée* le point $x, y, z; x', y', z'$ de cet espace.

3. Rappelons maintenant le théorème suivant dû à M. Fubini [1].

« Étant donné un ensemble E dans l'espace R_z mesurable et de mesure finie, l'ensemble $E(x, y)$ des points de E situés sur la droite x, y parallèle à l'axe des z est mesurable et de mesure finie

[1] *Sugli integrali multipli* (*Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 1907).

à un ensemble de droites de mesure nulle près. On a l'égalité

$$(6) \qquad m(\mathrm{E}) = \int_{\mathrm{R}-(e_0)} m\,\mathrm{E}(x, y)\,dx\,dy,$$

l'intégration étant étendue à un rectangle R du plan des x, y, à un ensemble de points e_0 de mesure nulle près. »

Il s'ensuit que si l'on envisage deux droites z, z' parallèles à l'axe des z, les ensembles $\mathrm{E}(x, y)$, $\mathrm{E}(x', y')$ sont mesurables si x, y et x', y' appartiennent à l'ensemble $\mathrm{R} - (e_0)$. Donc l'intégrale

$$(7) \qquad \mathrm{I}(x, y; x', y') = \int\int \frac{dz\,dz'}{r}$$

étendue à ces deux ensembles $\mathrm{E}(x, y)$, $\mathrm{E}(x', y')$ existe. Elle est sommable dans l'ensemble $\mathrm{R} - (e_0)$ de x, y et dans l'ensemble $\mathrm{R} - (e_0)$ de x', y'. On a l'égalité

$$(8) \qquad \mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{R}-(e_0)} dx\,dy \int_{\mathrm{R}-(e_0)} dx'\,dy'\,\mathrm{I}(x, y; x', y').$$

Formons maintenant un corps Q symétrique par rapport au plan x, y de la manière suivante. Nous plaçons, sur chaque droite z un segment $-\mathrm{Z}$, $+\mathrm{Z}$ dont la longueur $2\mathrm{Z}$ est égale à la mesure $m\mathrm{E}(x, y)$, à un ensemble des droites de mesure nulle près. Le volume du corps Q ainsi obtenu est égal à $m(\mathrm{E})$.

Envisageons le potentiel newtonien $\bar{\mathrm{I}}$ du corps Q :

$$(9) \qquad \bar{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\int\int\int\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{r}.$$

Posons

$$(10) \qquad \bar{\mathrm{I}}(x, y; x', y') = \int_{-\mathrm{Z}}^{+\mathrm{Z}} \int_{-\mathrm{Z}'}^{+\mathrm{Z}'} \frac{dz\,dz'}{r},$$

l'intégration étant étendue aux deux segments $-\mathrm{Z}$, $+\mathrm{Z}$ et $-\mathrm{Z}'$, $+\mathrm{Z}'$ situés sur les droites z, z'. Nous avons

$$(11) \qquad \bar{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\int\int_{\mathrm{R}-e_0} dx\,dy \int\int_{\mathrm{R}-(e_0)} dx'\,dy'\,\bar{\mathrm{I}}(x, y; x', y').$$

4. Il s'agit maintenant de comparer les intégrales I et $\bar{\mathrm{I}}$ en comparant les intégrales $\mathrm{I}(x, y; x', y')$ et $\bar{\mathrm{I}}(x, y; x', y')$.

Envisageons, d'abord, deux segments $\overline{z_1 z_2}$, $\overline{z'_1 z'_2}$ situés sur deux droites z, z'. Leur potentiel newtonien

$$(12) \qquad I^{\chi} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{z'_1}^{z'_2} \frac{dz\, dz'}{\sqrt{d^2 + (z - z')^2}}$$

est fonction de la différence ζ des coordonnées des milieux z_0, z'_0 de ces segments

$$\zeta = z'_0 - z_0,$$

et des longueurs h, h' de ces deux segments.

On prouve par des considérations élémentaires que la fonction $I^{\chi}(\zeta)$ possède un seul maximum absolu $\zeta = 0$. Envisageons deux nombres ζ, ζ'. La différence

$$I^{\chi}(\zeta) - I^{\chi}(\zeta')$$

est en valeur absolue plus grande que $m|\zeta - \zeta'|$, m étant un nombre fixe pour toutes les valeurs ζ, ζ' telles que l'on ait les inégalités

$$0 < k_1 < \zeta, \quad \zeta' < k_2,$$

et pour toutes les valeurs h, h' qui satisfont aux inégalités

$$0 < h_1 < h < h_2, \quad 0 < h'_1 < h' < h'_2.$$

Les nombres h_1, h_2; h'_1, h'_2; k_1, k_2 sont supposés fixes.

On prouve aussi par des considérations élémentaires, que si l'on envisage sur deux droites z, z' parallèles, deux groupes G, G' de n, n' segments de longueurs s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ et s'_j, $j = 1, 2, \ldots n'$, alors le potentiel newtonien de l'attraction de ces deux groupes de segments atteint son maximum absolu dans le seul cas où ces segments forment, sur chaque droite, un segment unique S, S', et où les ordonnées Z_0, Z'_0 des milieux de ces deux segments sont égales. Il n'y a pas d'autre maximum *relatif*.

Envisageons maintenant, sur les deux droites, deux ensembles bornés et mesurables E, E'. Nous pouvons définir sur ces droites deux segments S, S' de longueurs L, L' tels que la mesure des ensembles de points des ensembles E, E' situés en dehors de ces segments soit nulle. Tout segment que l'on obtient en remplaçant le segment S par un segment *plus petit* ne possède plus la pro-

priété précédente, et il en est de même du segment S'. Ces conditions définissent les segments S, S' d'une manière unique.

On peut diviser ces segments en trois catégories. A la *première* catégorie appartiennent les segments dont la longueur est égale à la mesure des points de l'ensemble qui sont situés sur ce segment. A la *deuxième* catégorie appartiennent les segments tels que la mesure $m(E)$ des points du segment appartenant à l'ensemble E est plus petite que la longueur du segment, mais que, dans tout intervalle s situé dans le segment S, la mesure de l'ensemble des points de E est supérieure à zéro. A la troisième catégorie appartiennent enfin les segments s qui contiennent à leur intérieur un segment s tel que la mesure des points de E contenus dans s est zéro.

Partageons les droites z, z' en des intervalles I, I'. Appelons e^i, e'^j les ensembles de points qui appartiennent aux ensembles E, E' et sont contenus dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle I et dans le $j^{\text{ième}}$ intervalle I'. Envisageons les sommes

$$\sum\nolimits_k = \sum_{i,j} \frac{m(e^{i,k})\, m(e'^{j,k})}{r^k_{i,j}}, \tag{13}$$

qui appartiennent à la $k^{\text{ième}}$ division d'une suite de divisions D_1, D_2, que l'on forme en subdivisant chaque fois les intervalles de la division précédente en parties égales.

Remplaçons ensuite les ensembles $e^{i,k}$, $e'^{j,k}$ par des segments $\bar{s}^{i,k}$ et $\bar{s}'^{j,k}$ concentriques aux intervalles I^k, I'^k et égaux aux mesures $m(e^{i,k})$, $m(e'^{j,k})$.

Formons les sommes

$$\sum\nolimits_k = \sum_{i,j} \int\int \frac{dz\, dz'}{r^k_{ij}}, \tag{14}$$

r^k_{ij} étant la distance de deux points variables des deux segments $\bar{s}^{i,k}$, $\bar{s}'^{j,k}$.

La limite des sommes (13) pour k infini est égale à la limite des sommes (14) pour k infini et égale à l'intégrale désignée précédemment par $I(x, y; x', y')$.

Il s'ensuit tout de suite que l'intégrale $\bar{I}(x, y; x', y')$, étendue à deux segments symétriques par rapport au plan x, y et dont les

longueurs sont égales aux mesures $mE(x, y)$ et $mE(x', y')$, *n'est pas plus petite* que l'intégrale $I(x, y; x', y')$

$$\bar{I}(x, y; x', y') \geqq I(x, y; x', y'). \tag{15}$$

Mais on peut prouver, de plus, que le signe *d'égalité* dans l'inégalité (15) ne peut avoir lieu que dans le cas où les deux segments S, S' introduits précédemment appartiennent à la première catégorie de segments et sont concentriques, c'est-à-dire que leurs milieux ont des coordonnées égales. La démonstration est un peu longue, mais sans difficultés, et elle est basée sur l'inégalité donnée au commencement de ce milieu.

5. Les résultats précédents permettent d'énoncer le *théorème I :*

« Le potentiel newtonien $\bar{I}$ du corps symétrique par rapport au plan x, y, Q, obtenu en formant sur chaque droite z, à un ensemble de droites de mesure nulle près des segments $-Z$, $+Z$ égaux à la mesure $mE(x, y)$, *n'est pas plus petit* que le potentiel newtonien $I = S$ de l'ensemble E. »

Supposons maintenant que sur un ensemble de droites z qui correspond à un ensemble E^z de mesure positive de points du plan x, y se trouvent des ensembles de points $E(x, y)$ tels que l'on ait l'inégalité

$$\bar{I}(x, y; x', y') > I(x, y; x', y') \tag{16}$$

pour toutes les paires de droites z, z' de l'ensemble de droites envisagé. A l'ensemble E^z correspond, dans l'espace des quatre variables x, y, x', y' un ensemble E^{zz} mesurable et de mesure $[m(E^z)]^2$. On peut alors choisir un nombre positif $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'ensemble E^{zz} des points de l'ensemble E^{zz}, pour lesquels on a l'inégalité

$$\bar{I}(x, y; x', y') - I(x, y; x', y') > \varepsilon, \tag{17}$$

soit de mesure $m(E^{zz})$ aussi voisine de $m(E^{zz})$ qu'on le veut.

Donc on parvient à l'inégalité

$$\bar{I} - I > d, \tag{18}$$

d étant un nombre positif.

Nous pouvons, dès lors, énoncer le *théorème II :*

« Étant donné un ensemble E borné, mesurable dans l'espace R_3, son potentiel newtonien I est *plus petit* que le potentiel newtonien $\bar{I}$ du corps symétrique Q obtenu en formant les intervalles $-Z$, $+Z$ de mesures égales aux mesures des ensembles E situés sur les droites z, à un ensemble de droites z de mesure nulle près, s'il existe un ensemble de mesure positive de droites telles que les segments S sur ces droites n'appartiennent pas à la première catégorie de segments, ou bien si tous les milieux z_0 des segments S, à un ensemble de droites de mesure nulle près, n'ont pas des ordonnées égales, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas situés sur un même plan parallèle au plan x, y.

6. Nous introduirons maintenant les définitions suivantes :

« *Sphère à un ensemble de mesure nulle près* » sera appelé tout ensemble E de points composé de tous les points d'une certaine sphère S, à laquelle on a ajouté un ensemble E_0 de mesure nulle de points et de laquelle on a soustrait un ensemble $\bar{E}_0$ de mesure également nulle.

« *Corps plein parfaitement symétrique à mesure nulle près* » sera appelé tout ensemble E borné qui possède les propriétés suivantes. Envisageons un plan arbitraire Π. Il existe alors un plan Π' parallèle au plan Π et tel que sur toutes les droites perpendiculaires à ce plan, à l'exception d'un ensemble de droites de mesure nulle, les points de l'ensemble E forment un segment S à un ensemble de points de mesure nulle près. Les milieux de ces segments sont situés sur le plan Π'.

Le théorème II affirme précisément que si un corps K n'est pas un corps plein parfaitement symétrique à un ensemble de mesure nulle près, il existe un autre corps Q, dont le potentiel newtonien est *plus grand* que celui du corps K.

La sphère à un ensemble de mesure nulle près est évidemment un corps plein parfaitement symétrique à mesure nulle près. Mais il subsiste aussi la réciproque, c'est-à-dire que l'on a le *théorème III :*

« Tout corps plein parfaitement symétrique à un ensemble de mesure nulle près est une sphère à un ensemble de mesure nulle près. »

Pour démontrer ce théorème, on montre d'abord que tous les plans de symétrie du corps K passent par un point unique, le centre C du corps K.

On divise alors tous les points de l'ensemble E en trois catégories. A la *première* catégorie appartiennent les points P qui sont tels qu'il existe une sphère σ de centre P et de rayon suffisamment petit telle que la mesure des points de E situés à l'intérieur de cette sphère est égale au volume de la sphère. A la *seconde* catégorie appartiennent les points P tels qu'il existe une telle sphère σ, à l'intérieur de laquelle les points de E ont la mesure nulle. Enfin, les points P de la *troisième* catégorie sont tels que dans chaque sphère σ de centre P et de rayon arbitrairement petit, la mesure des points de E est positive mais inférieure au volume de la sphère.

On montre alors que, si un point P appartient à la première catégorie, alors toute la sphère S de centre C et de rayon $\overline{CP}$ est composée de points de l'ensemble E à un ensemble de mesure nulle près.

Donc, ou bien il existe une sphère S de rayon non nulle et telle qu'elle est, presque partout, remplie de points de l'ensemble E et que tout point non intérieur à cette sphère ne peut appartenir qu'à la première ou à la seconde catégorie de points, ou bien tout point P de l'ensemble E appartient à la première et à la seconde catégorie.

Or on peut démontrer la propriété suivante de l'ensemble E : Toute sphère σ qui contient un ensemble de points de E de mesures positives possède, à son intérieur, une autre sphère $\bar{\sigma}$ telle que l'ensemble de points de E contenu dans $\bar{\sigma}$ possède une mesure égale au volume de cette sphère.

Donc, la sphère S dont il a été question possède la propriété suivante : Tout point P de l'ensemble E non intérieur à cette sphère appartient à la *première* catégorie de points. Donc l'ensemble de points de E extérieurs à la sphère S a la mesure nulle.

7. On peut maintenant démontrer le *théorème IV :* « Le potentiel newtonien d'une sphère S à mesure nulle près de volume V *n'est pas plus petit* que le potentiel de tout ensemble E borné mesurable, de mesure $m(E) = V$. »

Du rapprochement des théorèmes II et IV résultera évidemment

le *théorème V* : « La sphère S à mesure nulle près de volume V possède un potentiel newtonien *plus grand* que celui de tout corps K non parfaitement symétrique à mesure nulle près ».

Le théorème de Liapounoff sera établi.

La démonstration du théorème IV repose sur les considérations suivantes :

Nous avons vu que l'on peut obtenir le potentiel newtonien I de tout corps K en formant une suite de divisions $D_1, D_2, \ldots$ de l'espace, puis en remplaçant les ensembles de points de E contenus à l'intérieur des cubes K_i^k par des cubes concentriques $\overline{K}_i^k$ de côtés parallèles. La limite des sommes (4) des intégrales $I_{i,j}^k$ était égale au potentiel I du corps K.

Donc, si l'on démontre que le potentiel I de la sphère *n'est pas plus petit* que le potentiel d'un corps formé par un nombre fini de polyèdres extérieurs les uns aux autres, le théorème IV sera établi.

Dans la démonstration, on se sert du *lemme de choix* suivant que l'on trouve démontré dans plusieurs travaux modernes :

« Soit donnée une suite infinie de corps $K_1, K_2, \ldots$ que l'on suppose être des ensembles parfaits de points. Supposons cette suite *uniformément bornée*. Cela veut dire que tous ces ensembles sont renfermés dans un cube de côté suffisamment grand.

Alors on peut extraire, de cette suite, une autre suite, également infinie de corps $K'_1, K'_2, \ldots$ qui possède la propriété suivante : Si l'on envisage la plus *petite distance* $D(P, K'_n)$ d'un point P et du corps K'_n, en supposant le point P situé dans le cube mentionné, cette distance tend vers une limite finie déterminée $D(x, y, z)$ lorsque n augmente indéfiniment. Cette distance tend *uniformément* vers la limite pour tous les points de ce cube. »

Envisageons maintenant le corps D_0, formé des points P du cube, pour lesquels $D(x, y, z)$ est égal à zéro. La moindre distance $D(P, K'_n)$ d'un point P du corps D_0 et du corps K'_n tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La moindre distance $D(P'_n D_0)$ d'un point arbitraire du corps K'_n et du corps D_0 tendent également uniformément vers zéro pour tout point P'_n de tout corps K'_n avec $\frac{1}{n}$.

Envisageons maintenant notre corps K composé d'un nombre fini de polyèdres. Envisageons trois plans Π, Π', Π'' rectangulaires. Symétrisons le corps K par rapport au plan Π, puis symétrisons le corps obtenu par rapport au plan Π', enfin le corps obtenu par rapport au plan Π''.

Si les plans Π, Π', Π'' ont été choisis de telle manière qu'aucun des trois axes $l = (\Pi, \Pi')$, $l' = (\Pi, \Pi'')$, $l'' = (\Pi', \Pi'')$ ne soit parallèle à aucune face d'aucun des polyèdres, alors le polyèdre $\overline{K}$ obtenu par la symétrisation possède les propriétés suivantes. Le polygone que l'on obtient en coupant le polyèdre $\overline{K}$ par un plan arbitraire parallèle à un des trois plans Π, Π', Π'' ne possède aucun côté parallèle à un de ses deux axes de symétrie.

8. Envisageons un plan $\overline{\Pi}$ perpendiculaire au plan Π'' et passant par l'axe l. Supposons que l'angle α des plans $\overline{\Pi}$ et Π soit incommensurable avec π. Symétrisons alors le corps $\overline{K}$ par rapport au plan Π. Nous obtenons un nouveau polyèdre K_2, à trois plans de symétrie, le plan $\overline{\Pi}$, le plan Π'' et le plan $\overline{\Pi}'$ perpendiculaire à ces deux plans et passant par l'axe l. Appelons K_1 le polyèdre désigné jusqu'ici par $\overline{K}$.

Comparons les périmètres $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ des polygones W_1, W_2 sections des corps K_1, K_2 par un plan perpendiculaire à l'axe l. On prouve que la longueur du périmètre du polygone $\overline{U}_2$ n'est pas plus grande que celle du polygone $\overline{U}_1$.

Symétrisons de nouveau le corps K_2 par rapport au plan Π en obtenant un nouveau corps K_3. En poursuivant ce procédé, on obtient une suite infinie de corps

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots \tag{19}$$

alternativement symétriques par rapport aux deux plans Π et $\overline{\Pi}$.

Tous ces corps sont *uniformément bornés*. Donc, d'après le lemme de choix cité, on peut extraire de la suite (19) une autre suite infinie

$$K'_1, \quad K'_2, \quad \ldots \tag{20}$$

qui tend *uniformément* vers un corps D_0 défini comme auparavant.

On prouve que ce corps est un *corps de révolution* autour de l'axe l. Envisageons les polygones W'_1, W'_2, ... sections des corps K'_1, K'_2 par un plan perpendiculaire à l'axe l. Les périmètres $\overline{U}'_1$, $\overline{U}'_2$ de ces polygones ont des longueurs non croissantes. En se servant d'un lemme de choix connu [1], on montre que les périmètres $\overline{U}'_1$, $\overline{U}'_2$, ... tendent *uniformément* vers un cercle Γ dont l'aire est égale à celle des polygones W'_1, W'_2, ...

Donc les polyèdres (20) tendent uniformément vers un corps D_0 *de même volume* V.

On montre alors que si l'on envisage les sections des corps (20) par les plans parallèles au plan Π'', les suites des polygones W'_1, W'_2, ... de ces plans tendent *uniformément* vers les cercles correspondants, uniformément par rapport à la position de ce plan. Il s'ensuit que les potentiels newtoniens I'_1, I'_2, ... des corps (20) tendent, en croissant, vers le potentiel newtonien I_0 du corps D_0.

Il s'ensuit que la suite (19) elle-même tend uniformément vers le corps de révolution D_0 dont le volume est égal au volume du corps K dont on était parti et dont le potentiel newtonien I_0 est plus grand que celui du corps K.

9. On démontre maintenant que, parmi tous les corps de révolution D_0 à axe l et de même volume, *la sphère* possède le potentiel newtonien le plus grand.

Envisageons dans ce but avec M. Tonelli [2] une droite perpendiculaire à la droite l et qui rencontre cette droite, par exemple la droite l'. Symétrisons le corps D_0 par rapport à cet axe l' de manière à obtenir un corps de révolution D_1 autour de cet axe. Le volume du corps de révolution D_1 est égal à celui du corps de révolution D_0, et le potentiel newtonien est plus grand que celui du corps D_0.

Symétrisons ensuite le corps D_1 par rapport à l'axe l et poursuivons ce procédé indéfiniment. Nous obtenons une suite infinie de corps de révolution

$$D_0, \quad D_1, \quad \ldots. \tag{21}$$

---

(1) G. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Chap. IX).

(2) *Sulla proprietà di minimo della sfera* (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1915).

Cette suite est *uniformément bornée*. Donc on peut extraire de cette suite une autre suite infinie

$$(22) \qquad D'_0, \quad D'_1, \quad \ldots$$

qui converge uniformément vers un certain corps E_0.

Or ce corps est une *sphère* de même volume que celui des corps (22) et de potentiel newtonien plus grand.

Il s'ensuit que la suite (21) elle-même tend uniformément vers la sphère E_0, de même volume V et de potentiel newtonien plus grand que ceux des corps de la suite (21).

Le théorème IV est ainsi établi.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Giraud (Georges). — *Leçons sur les fonctions automorphes; Fonctions automorphes de n variables; Fonctions de Poincaré.* Un volume in-8° raisin (250 × 162) de IV-128 pages, avec 8 figures dans le texte; Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1920. Prix : 13 fr.

Muir (Thomas). — *The theory of determinants in the historical order of development :*

Vol. I : Part I. *General determinants up to* 1841. Part II. *Special determinants up to* 1841. 1 vol. in-8°, 2nd edition, XI-491 pages, 1906;

Vol. II : *The Period* 1841 *to* 1860. 1 vol. in-8°, XVI-475 pages, 1911;

Vol. III : *The Period* 1861 *to* 1880. 1 vol. in-8°, de XXVI-503 pages, 1920. London, Macmillan and Co., Ltd.

Vivanti (Giulio). — *Lezioni di Analisi infinitesimale.* Seconda edizione, riveduta ed ampliata. 1 vol. gr. in-8° de VII-326 pages. Torino, S. Lattes e C., 1920.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WILSON (EDWIN BIDWELL). — AERONAUTICS. *A class text.* [Aéronautique Aide-mémoire]. First edition. 1 vol. in-8°, VIII-265 pages. New-York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall; 1920.

La construction des aéronefs a fait pendant la guerre des progrès énormes. Les États-Unis, qui avaient complété si magnifiquement, par les frères Wright, la lignée des précurseurs : Pénaud, Lilienthal, Ader, Chanute, Langley, Moutard, Voisin, Blériot, se trouvaient au moment de leur déclaration de guerre très en retard par rapport aux nations associées. Dans ce domaine, comme dans tous ceux qui touchaient à la guerre, un effort énorme fut fait pour placer les États-Unis au même niveau que les nations combattantes. Nous savons tous comment en quelques mois une énorme armée fut créée, instruite et placée sur le champ de bataille. Mais parce que le gros de cette armée n'a participé qu'aux dernières batailles, nous serions peut-être tentés de croire que la création de cette armée n'a été qu'une entreprise supplémentaire des États-Unis. Il faut, au contraire, se rendre compte qu'une fois la guerre déclarée, les États-Unis y sont entrés tout entiers, s'y sont dévoués complètement. Leurs Universités, par exemple, se sont transformées de fond en comble pour satisfaire aux besoins directs et indirects de la préparation à la guerre.

C'est en partie à ce mouvement qu'est due la publication du cours du Professeur Wilson. Celui-ci fait observer lui-même qu'il n'a pu profiter de tous les progrès faits pendant la guerre, progrès qui se sont effectués en secret grâce à des études qui n'ont pas encore été publiées. Mais il fait observer aussi que le livre qu'il publie, n'étant composé que des parties les plus élémentaires, ne souffrira pas de cette circonstance. Il espère avec raison qu'il donnera au contraire les moyens, à ceux que ces questions intéressent, de se mettre rapidement à même de lire la masse de tra-

vaux originaux qui, rédigés pendant la guerre, ne tarderont pas à être mis en circulation. Il sera bon, d'ailleurs, à ce moment, de mettre au point la part de chacun dans ce domaine. Car si les Anglais et aussi les Italiens ont énormément augmenté et amélioré leur production aéronautique, il ne faut pas oublier que, nécessité aidant, c'est (du côté des Alliés) la France qui a dû faire les premières écoles sur une grande échelle grâce à quoi nos Alliés ont pu immédiatement profiter de nos observations. Pendant la guerre, chaque corps d'armée anglais a été pourvu, dès le début, d'une proportion d'aéroplanes supérieure. Mais, au total, c'est seulement vers les derniers mois de la guerre que la production britannique est devenue sensiblement équivalente à la nôtre. Et si pour notre aviation nous avons reçu d'Angleterre des millions de mètres de toiles, et d'énormes quantités d'huile de ricin, de fer et d'acier, nous lui avons fourni des aéroplanes en grand nombre, dans la première période, et des moteurs jusqu'à la fin [1]. On me permettra d'insister sur ce point : durant mes séjours en Angleterre, j'ai pu constater que tous, là-bas, connaissaient l'étendue de nos pertes, mais que bien peu se rendaient compte de notre prodigieux effort industriel et technique. Il faudra en particulier, en ce qui concerne les progrès de l'aviation, ne pas oublier que si l'Amérique a, par suite de la similitude de langage, largement utilisé les publications britanniques, c'est en France que, pendant la première partie de la guerre, se sont faites les principales améliorations. Sans elle, le très bel exploit de la traversée de l'Atlantique n'aurait pas pu se produire aussitôt.

Il faut d'ailleurs encore moins se dissimuler que nos alliés ont largement rattrapé notre avance et nous devons craindre qu'une réaction, bien naturelle à la suite de notre effort pendant la guerre, ne nous laisse maintenant en arrière.

Un livre comme celui de M. Wilson pourra contribuer à réveiller l'intérêt pour l'aviation.

Il n'est pas écrit pour les techniciens de l'aviation. Il pourrait, tout au plus, servir aux spécialistes qui se sont surtout occupés de la pratique sans en approfondir les principes et qui voudraient

---

[1] Pendant les trois premiers trimestres de 1918, il a été construit en France plus de 18000 avions et plus de 34000 moteurs.

maintenant, à leurs moments perdus, se mettre en état de suivre le côté scientifique.

Mais, comme son titre l'indique, c'est avant tout un livre pour les débutants et particulièrement pour les élèves ingénieurs, un « class-text » en un mot.

Sans doute un savant pourra y critiquer tel ou tel détail. S'il s'agissait avant tout d'approfondir les principes de la Mécanique, on pourrait, par exemple, reconnaître que le principe des petits mouvements, excellent pour reconnaître l'instabilité d'un système, peut prêter à objections en ce qui concerne la stabilité. Supposant les mouvements petits et posant les équations dans cette hypothèse, peut-on en effet logiquement conclure quelque chose du fait qu'on les trouve effectivement petits ? Mais c'est là un raisonnement rapide, employé partout, et qui, s'il ne justifie pas l'hypothèse, donne en tout cas les résultats numériques cherchés lorsque l'hypothèse est exacte.

Comme le fait remarquer M. Wilson, l'expérience ne confirme pas la vue simpliste qui fait dépendre seulement la pression de l'élément de plan envisagé, et des particules d'air infiniment voisines. Mais un théoricien aimerait insister sur le fait que depuis Newton, on n'a pas seulement substitué les résultats de l'expérience à une théorie grossière. On a aussi entièrement substitué un nouveau point de vue à cette théorie grossière, en reconnaissant que la pression sur un élément dépend de toute la masse d'air et, en particulier, de toute la masse d'air qui environne l'ensemble de l'aéroplane dont fait partie l'élément. A ce point de vue, des travaux comme ceux de M. Villat, mon éminent collègue de Strasbourg, sont destinés à ramener l'unité et, par conséquent, à obtenir des conséquences plus lointaines qu'un simple recours aux données partielles de l'expérience.

Mais M. Wilson a eu soin d'indiquer, dans sa Préface, qu'il n'expose dans son livre que les parties les plus élémentaires, et il importe de ne pas se perdre dès le début dans des considérations théoriques. M. Wilson veut avant tout, comme on dit maintenant, « réaliser ». Il ne se propose pas d'assurer d'avance un large développement aux recherches; mais il ne lui suffit pas non plus d'offrir une sorte d'aide-mémoire pour contremaîtres. Son Ouvrage n'est ni une collection de recettes, ni un traité pesant. S'adressant à des

étudiants qui, sans avoir étudié l'analyse supérieure, ont néanmoins une connaissance suffisante de ce que nous appelons les mathématiques générales, il se propose de leur faire parcourir les premiers éléments de l'aéronautique, sans fatigue, comme d'autres ont pu écrire « le latin sans pleurs » ou « le grec sans larmes ».

Son livre a tous les mérites des Ouvrages de langue anglaise : simplicité, recours constant à l'intuition visuelle, théories constamment appuyées d'exemples numériques et concrets. Mais en même temps (pourrais-je sans exagération en reporter un peu le mérite au séjour en France par lequel il a terminé ses études, ou serait-ce tout simplement un dôn propre de M. Wilson) on trouve dans son livre une clarté d'exposition, un souci de l'ordre qui sont généralement des qualités reconnues aux Ouvrages français. Ces qualités, j'avais déjà eu le plaisir de les signaler dans son excellent Ouvrage *Advanced Calculus*, avec d'autant plus d'assurance que je me sentais sur un terrain plus familier.

Pour résumer en quelques mots la matière de *Aeronautics*, disons seulement qu'il se compose essentiellement de deux parties : mécanique du corps rigide formé par l'aéroplane, en rappelant ce qui concerne le mouvement à deux ou trois dimensions; mécanique du fluide qui entoure l'aéroplane et enfin, pour coordonner les deux théories, mouvement d'un corps dans un fluide. Le tout accompagné de nombreux petits problèmes d'application immédiate et d'un index alphabétique.

Le Livre est d'ailleurs imprimé en caractères très lisibles et d'une agréable présentation.

MAURICE FRÉCHET.

HEATH (SIR THOMAS L.). — EUCLID IN GREEK. Book I, with *Introduction* and *Notes* (Euclide en grec. Livre I, avec une Introduction et des Notes). 1 vol. in-8, VIII-239 pages. Cambridge, University Press, 1920.

Plus qu'aucun autre historien contemporain, Sir Thomas Heath a contribué à rendre accessible aux lecteurs modernes les écrits des grands mathématiciens hellènes, en publiant cette remarquable série de traductions où il a fait œuvre de philologue érudit sans s'attacher pourtant trop servilement aux textes, visant par-dessus

tout à bien dégager et à interpréter clairement la pensée et la méthode des vieux auteurs. Nous ayant ainsi donné Euclide en anglais, Sir Thomas Heath se propose aujourd'hui de le présenter en grec en une suite d'élégants petits volumes dont le premier vient de paraître à l'University de Cambridge.

C'est qu'en effet, pour saisir toutes les nuances des définitions, postulats et propositions d'Euclide, il est indispensable de se reporter aux termes mêmes employés par l'auteur et de se demander comment ces termes sont introduits, à quelles images ils correspondent, quelles suppositions ils impliquent. Dans une série de notes, brèves mais précises, Sir Thomas Heath nous donne à ce sujet nombre d'indications précieuses.

Ainsi, par exemple, la définition 7, au Livre Ier des *Éléments*, introduit la notion de plan, ἐπίπεδος. L'étymologie du mot montre que la notion de plan est tirée de l'idée d'une surface sur laquelle on peut se tenir debout (une surface *plate*).

La définition 8 concerne l'angle. Les termes de cette définition montrent que, pour Euclide, l'idée qui est à la base de la notion d'angle est celle d'inclinaison (κλίσις). Au contraire, pour Aristote, l'idée d'angle se rattachait à celle de *déviation* (κλάσις) ou *brisure* d'une ligne formée de deux segments rectilignes (ligne brisée).

La quatrième notion commune introduit le terme ἐφαρμόζειν et l'idée d'*application* d'une figure sur une autre, dans le but de définir l'égalité des deux figures en les faisant coïncider. Sir Thomas Heath analyse de près cette définition fondamentale en étudiant les mots qui servent à l'exprimer.

C'est ainsi que, dans des cas nombreux, la philologie vient en aide à la mathématique. Un index placé à la fin du volume nous donne la liste des principaux termes grecs dont Heath a été amené à discuter le sens pour préciser la pensée d'Euclide.

D'ailleurs, à côté des termes qui définissent des figures ou opérations géométriques, il y a dans le texte des *Éléments* une autre catégorie de mots particulièrement importants. Ce sont ceux (verbes, conjonctions, adverbes), qui indiquent l'enchaînement logique des idées et des raisonnements. Sir Thomas Heath en explique minutieusement la signification et la portée.

Fort utiles, comme on voit, pour aider à l'intelligence du texte, les notes de Sir Thomas Heath sont également précieuses par les

renseignements qu'elles contiennent sur l'histoire de la géométrie grecque.

L'idée d'exposer le développement de la géométrie en suivant le cadre des *Éléments*, et en adoptant comme mode d'exposition la forme de commentaire, remonte à l'antiquité. Elle a été mise à profit par de nombreux auteurs grecs, et notamment par Proclus (Commentaire du Livre I, ve siècle, ap. J.-C.). Sir Thomas Heath reprend la même idée, utilisant principalement à cet effet le commentaire de Proclus, en l'interprétant toutefois et le complétant à la lumière des travaux historiques les plus récents (qui, pour la plupart, s'inspirent des découvertes et des vues de Paul Tannery). C'est ainsi qu'à propos de chaque proposition importante, Heath nous signale l'origine historique du fait énoncé et les différentes voies suivant lesquelles il a été établi par les prédécesseurs et continuateurs d'Euclide.

Un index des noms propres permet de rapprocher facilement les multiples renseignements historiques ainsi donnés par les notes de Heath. Ajoutons que l'Introduction placée en tête du volume contient des indications succinctes sur les principaux commentateurs d'Euclide et sur les plus notables éditions et traductions des *Éléments* qui ont été publiées depuis l'antiquité.

PIERRE BOUTROUX.

MÉLANGES.

SUR L'ÉTAT ACTUEL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES;

PAR M. N.-E. NÖRLUND.

1. Les grands géomètres du dix-huitième siècle, les Euler, les Stirling, les Lagrange et les Laplace, se sont occupés souvent du calcul aux différences finies. On y voyait surtout un moyen de

calculer les valeurs numériques d'une fonction par des interpolations et une méthode pour augmenter la convergence des séries par des transformations convenables. Lacroix a consacré le troisième Tome de son *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* à une exposition de ces recherches. En Angleterre, on cultivait surtout les méthodes symboliques. Boole les a exposées dans un Ouvrage suggestif : *A Treatise on the Calculus of finite Differences*. Mais on ne peut pas dire que les résultats obtenus soient très considérables. Il s'agit en grande partie de relations formelles dont on n'a pas précisé le sens, et ces géomètres ne venaient pas au fond de ces problèmes. Ce n'est que tout récemment qu'on a commencé d'appliquer les méthodes de la théorie des fonctions à cette branche de l'Analyse.

Le premier problème important qui se pose dans le calcul aux différences finies, c'est l'étude des solutions de l'équation

$$(1) \qquad F(x+1) - F(x) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Une étude approfondie de cette équation pourra faire réaliser des progrès considérables à plusieurs problèmes d'Analyse tels que celui des séries divergentes, celui des fractions continues, etc. Mais la question n'est pas sans présenter quelques difficultés. Elle a été abordée pour la première fois par Euler et Abel. L'établissement de la formule sommatoire d'Euler était déjà un premier pas vers le but. Cette formule a été présentée sous une nouvelle forme par Abel (1) et elle a été reprise plus récemment par M. Lindelöf (2).

M. Guichard (3) a consacré un beau Mémoire à la démonstration de l'existence des solutions de l'équation (1). M. Guichard envisage une intégrale de la forme

$$F(x) = \int_A^B \frac{\varphi(z)\, e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i z} - e^{2\pi i x}}\, dz$$

prise le long d'un segment de l'axe imaginaire. Cette intégrale a des lignes de discontinuité ou coupures du genre de celles qui ont

(1) *Œuvres*, t. I, 2e édition, Christiania, 1881, p. 11-27 et 34-39.
(2) *Acta math.*, t. XXVII, 1903, p. 305-312; *Le calcul des résidus*, Paris, 1905
(3) *Ann. Ecole Norm.*, 3e série, t. IV, 1887, p. 361-380.

été considérées pour la première fois par Hermite. L'intégrale représente dans un certain rectangle une solution analytique de l'équation (1). Mais, même si $\varphi(x)$ est une fonction entière, cette solution est non uniforme et admet une infinité de points critiques logarithmiques. Pour remédier à cet inconvénient, M. Guichard fait tendre A et B vers l'infini. Il démontre ainsi que l'équation (1) admet toujours une solution entière si $\varphi(x)$ est une fonction entière. Cette solution se représente dans la bande $0 < \mathfrak{R}(x) < 1$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z)\,E(x)\,dz}{E(z)(1 - e^{2\pi i(x-z)})},$$

$E(x)$ étant une fonction entière convenablement choisie. Si $E(x) = 1$, cette intégrale ne diffère pas, au fond, de celle qu'avait considérée Abel.

M. Appell [1] a attaqué le problème d'une autre manière. Si $\varphi(x)$ est un polynome

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

on sait trouver un polynome qui satisfait à l'équation (1). On a, en effet,

$$F(x) = \frac{a_0}{1} B_1(x) + \frac{a_1}{2} B_2(x) + \ldots + \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x),$$

les $B_i(x)$ étant les polynomes de Bernoulli. Mais si $\varphi(x)$ est une fonction entière

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} B_n(x)$$

n'est pas toujours convergente. M. Appell retranche du polynome $B_n(x)$ les n premiers termes de son développement en série trigonométrique. En désignant par $\Psi_n(x)$ la fonction entière ainsi obtenue, il démontre que la série

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} \Psi_n(x)$$

---

(1) *Journ. Math. pures et appl.*, 4e série, t. VII, 1891, p. 157-176.

converge uniformément et représente une fonction entière qui satisfait à l'équation (1).

Cette démonstration a été retrouvée par A. Hurwitz [1]. Ce géomètre fait en outre remarquer qu'il y a toujours une solution méromorphe quand $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe.

M. Appell a encore considéré des fonctions de deux variables et démontré ce qui suit : Étant données deux fonctions entières $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ de deux variables indépendantes, vérifiant l'identité

$$\varphi_1(x, y+1) - \varphi_1(x, y) = \varphi_2(x+1, y) - \varphi_2(x, y),$$

il existe une troisième fonction entière $F(x, y)$ vérifiant les deux équations

$$F(x+1, y) - F(x, y) = \varphi_1(x, y),$$
$$F(x, y+1) - F(x, y) = \varphi_2(x, y).$$

Un autre cas remarquable a été envisagé par M. E. Picard [2], dans un Mémoire dont nous parlerons plus loin. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction uniforme dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande de largeur très petite comprenant l'axe imaginaire. Soit ω un nombre positif. M. Picard démontre l'existence d'une solution uniforme de l'équation

$$F(x+\omega) - \mu F(x) = \varphi(x)$$

ayant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande limitée à gauche par l'axe imaginaire et à droite par une parallèle à cet axe située à une distance de l'origine qui est un peu plus grande que ω. En général, il n'y a qu'une seule solution $F(x)$ qui satisfait à ces conditions. Mais si μ est égal à $e^{\nu\omega}$, ν étant un entier positif, nul ou négatif, il y a une infinité de solutions qui sont de la forme

$$F(x) + c\,e^{\nu x},$$

---

(1) *Acta math.*, t. XX, 1897, p. 285-312. Une autre démonstration du théorème de M. Guichard a été donnée par M. Carmichael (*Amer. J. Math.*, t. XXXV, 1913, p. 163-171).

(2) *Acta math.*, t. XVIII, 1894, p. 135.

c étant une constante. L'existence d'une solution périodique a été envisagée aussi par MM. Appell [1], Guichard et Brodén [2].

Parmi les travaux récents, nous devons encore citer ceux de M. Barnes [3] qui a étudié une équation de la forme

$$F(x+1) - \varphi_1(x)F(x) = \varphi_2(x)$$

et certaines fonctions [4] qui se rattachent à la fonction gamma et à la fonction $\zeta(s)$.

2. La solution la plus générale de l'équation (1) est égale à une solution particulière augmentée d'une fonction périodique quelconque avec la période 1. La présence de cette fonction arbitraire a pour conséquence que la solution générale ne possède presque aucune propriété remarquable. Mais en regardant les solutions en nombre infini, on peut se rendre compte qu'il y en a, parmi elles, une seule qui se distingue des autres et qui est, pour ainsi dire, la plus simple. Je l'appelle *la solution principale*. Elle est déterminée à une constante additive près. C'est la solution principale qui est réellement intéressante, elle possède des propriétés remarquables qui n'appartiennent plus aux autres solutions. Les voies ouvertes par MM. Guichard et Appell sont certainement utiles et elles conduisent entièrement au but que se sont proposé ces auteurs. Mais on peut reprocher à ces méthodes qu'on ne voit pas très bien quelles sont les propriétés des fonctions dont on démontre l'existence. On ne voit pas aisément comment choisir les fonctions, dans une certaine mesure arbitraires, qui entrent comme un élément essentiel dans la démonstration, pour arriver à la solution la plus simple [5]. J'ai étudié [6] l'équation (1) d'un

---

(1) *Math. Ann.*, t. XIX, 1882, p. 84-102.

(2) *Acta Universitatis Lundensis*, nova series, t. VIII, 1912, n° 7; *voir* aussi *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. VII, 1911, n° 6.

(3) *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. II, 1904, p. 438-469.

(4) *Quart. J. pure appl. math.*, t. XXXI, 1900, p. 264-314; *Philos. Trans. London*, t. 196 A, 1901, p. 265-387; *Trans. Cambr. philos. Soc.*, t. XIX, 1904, p. 374-425.

(5) Par exemple, si $\varphi(x)$ est un polynome, la solution principale est encore un polynome; mais la solution définie par l'intégrale de M. Guichard est une transcendante.

(6) *C. R. Acad. Sc.*, t. 169, 1919, p. 372-375, 462-464, 770-772, 894-896; *Acta math.*, t. 44, 1921 (*sous presse*).

point de vue qui ne souffre pas de cet inconvénient. Posons, pour abréger,

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega}, \qquad \underset{\omega}{\nabla} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2},$$

et considérons les deux équations aux différences finies

$$(2) \qquad \underset{\omega}{\Delta} F(x) = \varphi(x),$$

$$(3) \qquad \underset{\omega}{\nabla} G(x) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée de x, mais indépendante de ω. Quand on veut résoudre ces deux équations, il paraît naturel de prendre comme point de départ les séries suivantes :

$$(2\,bis) \qquad -\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega),$$

$$(3\,bis) \qquad 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega).$$

Si elles convergent, elles représentent des solutions de nos deux équations. Mais même si elles divergent, on peut, dans des cas étendus, en tirer parti en se reportant à la théorie des séries divergentes due à M. Borel, à M. Mittag-Leffler et autres. Je définis la solution principale $G(x|\omega)$ de l'équation (3) comme la somme de la série (3 *bis*) convergente ou non. Pour abréger, je désigne cette somme par le symbole

$$(4) \qquad G(x\,|\,\omega) = \mathbf{S}\, \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x.$$

Ce symbole représente donc l'opération inverse à l'opération $\underset{\omega}{\nabla}$. On peut appliquer à la série (3 *bis*) une infinité de procédés de sommation d'une nature bien différente, mais on démontre [1] que tous ceux qui s'appliquent à une fonction donnée $\varphi(x)$ sont équivalents et conduisent à un même résultat. Il est nécessaire d'en avoir une infinité, si l'on veut pouvoir traiter tous les cas dont il y a intérêt à s'occuper. Il entre donc, ici encore, un élé-

---

[1] Voir *Acta Universitatis Lundensis*, nova series, t. XIV, 1917, n° 15; t. XVI, 1919, n° 3.

ment arbitraire, le facteur de convergence qu'on introduit dans la série et qu'on fait ensuite tendre vers *un*. Ce facteur dépend, dans une certaine mesure, de la fonction $\varphi(x)$, mais le résultat final est indépendant du procédé de sommation, de sorte que la définition est unique. C'est le point essentiel.

De même, considérons l'expression

$$\int_a^\infty \varphi(z)\,dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega),$$

a étant une constante. Appliquons à l'intégrale et à la série le même procédé de sommation en introduisant le même facteur de convergence. Si la différence entre l'intégrale et la série tend vers une limite quand le facteur de convergence tend vers *un*, je définis la solution principale $F(x|\omega)$ de l'équation (2) par cette limite. Pour abréger, je désigne cette limite par le symbole

$$(5) \qquad F(x\,|\,\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z.$$

Ce symbole représente donc l'opération inverse à l'opération $\underset{\omega}{\Delta}$ et il dépend de la constante arbitraire a. Supposons d'abord ω positif. Nous ferons successivement diverses hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$. Mais dans la plupart des cas que nous considérons ici, on peut se borner à appliquer une seule méthode de sommation en prenant comme facteur de convergence $e^{-\eta x}$. On a donc par définition

$$(6) \qquad \mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla} x = \lim_{\eta=0} 2 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)},$$

$$(7) \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z = \lim_{\eta=0} \left[\int_a^\infty \varphi(z)\, e^{-\eta z}\, dz - \omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)} \right],$$

pourvu que les limites existent. On peut, si l'on aime mieux, remplacer ces limites par d'autres qui en sont équivalentes. L'intégrale qui figure dans la seconde limite ne dépend pas de la variable x, elle a été introduite pour assurer l'existence de la limite.

Supposons que $\varphi(x)$ soit continue pour $x \geqq a$ et que les seconds

membres des équations (4) et (5) tendent vers une limite uniformément par rapport à x et à ω. On démontre que les fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont continues pour $x \geqq a$ et pour $\omega > 0$. Faisons tendre le nombre positif [1] ω vers zéro, il vient

$$\lim_{\omega=0} \mathop{\mathrm{S}}\, \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \varphi(x),$$

$$(8) \qquad \lim_{\omega=0} \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(x) \underset{\omega}{\Delta} x = \int_a^x \varphi(x)\, dx.$$

En remplaçant $\varphi(x)$ par $\nabla\varphi(x)$ ou par $\Delta\varphi(x)$, on trouve

$$\mathop{\mathrm{S}}\, \left[\underset{\omega}{\nabla}\varphi(x)\right] \underset{\omega}{\nabla} x = \varphi(x),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \left[\underset{\omega}{\Delta}\varphi(x)\right] \underset{\omega}{\Delta} x = \varphi(x) - \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} \varphi(x)\, dx.$$

D'autre part, on vérifie immédiatement que

$$\underset{\omega}{\nabla}\left[\mathop{\mathrm{S}}\, \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x\right] = \varphi(x),$$

$$\underset{\omega}{\Delta}\left[\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(x) \underset{\omega}{\Delta} x\right] = \varphi(x).$$

c'est-à-dire que les fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ satisfont aux équations (3) et (2).

Dans l'équation (7), remplaçons x successivement par $x + \frac{\omega}{m}$, $x + \frac{2\omega}{m}$, ..., $x + \frac{m-1}{m}\omega$ et ajoutons ensemble les m équations ainsi obtenues. On trouve la relation remarquable suivante :

$$(9) \qquad \sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m}\middle|\omega\right) = m\, F\left(x\middle|\frac{\omega}{m}\right),$$

m étant un entier positif quelconque. De la même manière, on

---

[1] Nous donnerons plus loin à ω des valeurs complexes et l'on verra que ces égalités, en général, cessent d'être vraies quand ω s'approche de l'origine d'une manière quelconque.

démontre que la fonction G satisfait à la relation

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \, G\left(x + \frac{s\omega}{m} \middle| \omega\right) = G\left(x \middle| \frac{\omega}{m}\right),$$

m étant un entier positif impair, et que

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \, F\left(x + \frac{s\omega}{m} \middle| \omega\right) = -\frac{\omega}{2} G\left(x \middle| \frac{\omega}{m}\right),$$

m étant un entier positif pair quelconque. En posant $m = 2$, on trouve, en particulier,

$$\underset{\omega}{\nabla} F(x \mid 2\omega) = F(x \mid \omega),$$

$$(10) \qquad \underset{\omega}{\Delta} F(x \mid 2\omega) = G(x \mid \omega).$$

Divisons les deux membres de l'équation (9) par m et faisons tendre m vers l'infini; on trouve, en tenant compte de l'équation (8),

$$(11) \qquad \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z \mid \omega)\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, dz.$$

3. Tous ces résultats se déduisent presque immédiatement de la définition des solutions principales. Mais ces fonctions possèdent encore d'autres propriétés remarquables que nous allons mettre en évidence en faisant des hypothèses plus particulières relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons d'abord que $\varphi(x)$ admette, pour $x \geqq a$, une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m, telle que l'intégrale

$$\int_a^\infty \varphi^{(m)}(z)\, dz$$

converge absolument. Alors on démontre que les expressions (6) et (7) tendent uniformément vers une limite, x variant dans un intervalle fini quelconque $a \leqq x \leqq A$. Soit h un nombre tel que $0 \leqq h \leqq \omega$. Soit $E_\nu(x)$ le polynome d'Euler, c'est-à dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega}{\nabla} E_\nu(x) = x^\nu,$$

ν étant un entier positif. Soit $B_\nu(x)$ le polynome de Bernoulli, c'est-à-dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega}{\Delta} B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1}$$

et qui se réduit, pour $x = 0$, au nombre de Bernoulli B_ν. Soient enfin $\dot{E}_\nu(x)$ et $\dot{B}_\nu(x)$ deux fonctions périodiques qui coïncident respectivement avec les polynomes $E_\nu(x)$ et $B_\nu(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega$ et qui satisfont, d'ailleurs, aux relations suivantes :

$$\dot{E}_\nu(x+\omega) = -\dot{E}_\nu(x),$$
$$\dot{B}_\nu(x+\omega) = \dot{B}_\nu(x).$$

A l'aide de la formule sommatoire d'Euler, on peut transformer les expressions (6) et (7) et, après un double passage à la limite, on trouve, pour les fonctions G et F, les deux développements suivants :

$$(12)\quad G(x+h\,|\,\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \varphi^{(\nu)}(x)\frac{E_\nu(h)}{\nu!} + \int_0^\infty \varphi^{(m)}(x+z)\frac{\dot{E}_{m-1}(h-z)}{m!}\,dz.$$

$$(13)\quad F(x+h\,|\,\omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu-1)}(x)\frac{B_\nu(h)}{\nu!}$$
$$+ \int_0^\infty \varphi^{(m)}(x+z)\frac{\dot{B}_m(h-z)}{m!}\,dz.$$

Les intégrales aux seconds membres sont absolument convergentes. Si l'on fait tendre m vers l'infini, ces séries seront, en général, divergentes, mais on peut opérer en toute sûreté avec elles, en tenant compte du terme reste. On voit ainsi que la fonction $G(x|\omega)$, respectivement $F(x|\omega)$, admet, pour $x > a$, une dérivée continue d'ordre $m-1$, respectivement d'ordre m. Ces deux dérivées tendent vers des limites finies quand x augmente indéfiniment. Cette propriété est caractéristique pour les solutions principales. Il n'y a aucune autre solution qui possède la même propriété.

En général, les fonctions $G(x)$ et $F(x)$ ne tendent pas vers des limites quand x tend vers l'infini, mais les intégrales aux seconds membres des équations (12) et (13) tendent vers zéro quand x augmente indéfiniment. Les séries (12) et (13) nous donnent donc

un renseignement très précis sur la manière dont se comportent les fonctions $G(x)$ et $F(x)$ pour des valeurs positives et très grandes de x.

Mais les deux séries peuvent encore servir à un autre but. Nous avons déjà vu que les solutions principales tendent vers des limites finies quand le nombre positif ω tend vers zéro. En posant $h = 0$ ou $h = \frac{\omega}{2}$ dans les séries (12) et (13), il vient

$$(14)\qquad G(x \mid \omega) = \varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(2\nu-1)}(x) \frac{C_{2\nu-1}\,\omega^{2\nu-1}}{2^{2\nu-1}(2\nu-1)!} + R_{2m+1},$$

$$(14')\qquad G\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \varphi^{(2\nu)}(x) \frac{E_{2\nu}\,\omega^{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!} + R'_{2m},$$

$$(14'')\qquad F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz - \frac{\omega}{2}\varphi(x) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \varphi^{(2\nu-1)}(x) \frac{B_{2\nu}\,\omega^{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!} + R''_{2m},$$

$$(14''')\qquad F\left(x + \frac{\omega}{2} \middle| \omega\right) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m-1} \varphi^{(2\nu-1)}(x) \frac{D_{2\nu}\,\omega^{2\nu}}{2^{2\nu}(2\nu)!} + R''_{2m}.$$

Les C_ν, D_ν et E_ν sont des nombres rationnels qui s'expriment par les nombres de Bernoulli B_ν. Ces quatre séries de puissances divergent, en général, pour toute valeur de ω différente de zéro, mais *elles représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement pour des valeurs positives et très petites* de ω. Supposons, pour un instant que, quand x augmente indéfiniment, $\varphi^{(m)}(x)$ tende vers zéro en variant toujours dans le même sens, et qu'il en soit de même de $\varphi^{(m+1)}(x)$. Dans ces conditions, les termes restes des séries précédentes peuvent s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned}
R_{m-1} &= \frac{C_{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{m-1} \varphi^{(m-1)}(x + \Theta\omega),\\
R'_m &= \frac{E_m}{m!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{m} \varphi^{(m)}(x + \Theta\omega),\\
R''_m &= \frac{B_m}{m!}\,\omega^m\,\varphi^{(m-1)}(x + \Theta\omega),\\
R'''_m &= \frac{D_m}{m!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{m} \varphi^{(m-1)}(x + \Theta\omega),
\end{aligned}$$

Θ étant un nombre compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, et m étant supposé

pair. Les quatre séries possèdent donc la même propriété que la série de Stirling. Quand on s'arrête à un certain terme, l'erreur commise est plus petite que la valeur absolue du premier terme négligé.

On peut remplacer les limites (6) et (7) par d'autres limites qui, quelquefois, sont d'une application plus facile. Soit r le plus petit entier, tel que

$$\lim_{x=\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0.$$

Posons

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{E_\nu(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$q(x) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=0}^{r} \frac{B_\nu(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x).$$

De ce que nous venons de dire relativement aux séries (12) et (13), on conclut que les fonctions G et F se représentent par les limites suivantes :

$$G(x \mid \omega) = \lim_{n=\infty} \left[2\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \varphi(x+s\omega) + (-1)^n p(x-h+n\omega) \right],$$

$$F(x \mid \omega) = \lim_{n=\infty} \left[q(x-h+n\omega) - \omega \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x+s\omega) \right].$$

On peut aussi, des deux séries divergentes, déduire les séries convergentes suivantes :

$$G(x \mid \omega) = p(x-h) + 2\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\nabla} p(x-h+s\omega)],$$

$$F(x \mid \omega) = q(x-h) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\Delta} q(x-h+s\omega)],$$

qui représentent les fonctions au premier membre pour toute valeur de $x \geqq a+\omega$. Si l'on pose $h=0$ ou $h=\frac{\omega}{2}$, ces quatre expressions se simplifient.

Soit x_0 un nombre quelconque plus grand que a. La fonction $F(x)$ admet dans l'intervalle $x_0 < x < x_0+\omega$ un développement

en série de Fourier,

$$(15)\qquad F(x\,|\,\omega) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{\omega} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{\omega}\right)$$

dont les coefficients s'expriment d'une manière très simple à l'aide de la fonction donnée $\varphi(x)$. De la convergence uniforme de l'expression (7), il résulte, en effet, qu'on a

$$a_0 = \int_a^{x_0} \varphi(z)\,dz,$$

$$a_n = -\lim_{\eta=0}\int_{x_0}^{\infty} \cos\frac{2\pi n z}{\omega}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz,$$

$$b_n = -\lim_{\eta=0}\int_{x_0}^{\infty} \sin\frac{2\pi n z}{\omega}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz.$$

Des équations (10) et (15), on déduit pour la fonction $G(x)$ la série trigonométrique suivante :

$$G(x\,|\,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{\omega} + \beta_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{\omega}\right],$$

où

$$\alpha_n = \frac{4}{\omega}\lim_{\eta=0}\int_{x_0}^{\infty} \cos\frac{\pi n z}{\omega}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz,$$

$$\beta_n = \frac{4}{\omega}\lim_{\eta=0}\int_{x_0}^{\infty} \sin\frac{\pi n z}{\omega}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz.$$

Ce développement est valable dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + \omega$. Mais ce n'est pas une série de Fourier. Celle-ci est moins intéressante dans le cas actuel. En posant, en particulier, $x = x_0$ ou $x = x_0 + \frac{\omega}{2}$ dans l'équation (15), il vient

$$F(x\,|\,\omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz - \frac{\omega}{2}\varphi(x)$$
$$- 2\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\eta=0}\int_0^{\infty} \varphi(x+z)\,e^{-\eta z}\cos\frac{2\pi n}{\omega}z\,dz,$$

$$F\left(x+\frac{\omega}{2}\,\middle|\,\omega\right) = \int_a^x \varphi(z)\,dz$$
$$- 2\sum_{n=1}(-1)^n\lim_{\eta=0}\int_0^{\infty} \varphi(x+z)\,e^{-\eta z}\cos\frac{2\pi n}{\omega}z\,dz.$$

Ces développements représentent la fonction F pour toute valeur de $x > a$. Soit en particulier $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, la première série prend la forme

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \log x - \frac{1}{2x} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos 2\pi n z \frac{dz}{x+z}.$$

Cette série converge, pourvu que x soit positif.

4. Les fonctions F et G sont définies d'abord pour des valeurs réelles de x et des valeurs positives de ω. Nous allons maintenant prolonger analytiquement ces fonctions. Plusieurs des expressions précédentes peuvent servir à ce but, mais il y en a d'autres qui sont applicables dans des cas plus généraux et que nous allons mettre en évidence.

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique de x, holomorphe dans un petit angle $\mathfrak{I}$ entourant l'axe des nombres positifs et que l'égalité

$$\lim_{|x|=\infty} \varphi(x)\, e^{-\varepsilon|x|} = 0$$

ait lieu uniformément dans l'angle $\mathfrak{I}$ pour toute valeur positive de ε. A l'aide de l'intégrale de Cauchy, on démontre aisément que les limites (6) et (7) existent et qu'on a

$$\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = i \int_{\mathrm{C}} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z},$$

C étant un lacet formé d'un arc d'un petit cercle entourant l'origine et de deux rayons vecteurs situés à l'intérieur de l'angle $\mathfrak{I}$. En posant

$$f(x) = \int_a^x \varphi(z)\, dz,$$

on trouve de même

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz.$$

On voit, à ces deux intégrales, que $\mathrm{G}(x|\omega)$ et $\mathrm{F}(x|\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω holomorphes pour toute

valeur de ces variables, qui est à l'intérieur de l'angle $\mathfrak{S}$. Mais ces équations restent valables pour certaines fonctions qui ne rentrent pas dans les conditions que nous venons d'imposer à la fonction $\varphi(x)$.

5. Pour le voir, nous remplacerons (6) et (7) par les limites suivantes :

$$\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\,\underset{\omega}{\nabla}x = 2\lim_{\eta=0}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\,\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta\lambda(x+s\omega)},$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\,\underset{\omega}{\Delta}z = \lim_{\eta=0}\left[\int_a^{\infty}\varphi(z)\,e^{-\eta\lambda(z)}\,dz - \omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}\right],$$

$\lambda(x)$ étant une fonction de la forme

$$\lambda(x) = x\rho(\log x)^p \qquad (\rho \geqq 1,\ p \geqq 0).$$

En prenant ces limites pour point de départ on retrouve, quelle que soit $\lambda(x)$, les deux intégrales que nous venons d'indiquer.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ soit holomorphe, si la partie réelle de x est plus grande que b et qu'il existe un nombre non négatif k tel que l'inégalité

$$(16) \qquad |\varphi(x)| < \mathrm{C}e^{(k+\varepsilon)|x|}$$

ait lieu dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$ pour toute valeur positive de ε. Dans ces conditions, on démontre l'existence des deux limites que nous venons d'indiquer en prenant $\rho > 1$ ou $\rho = 1$ et $p > 0$ et l'on trouve

$$(17) \quad \mathrm{G}(x\,|\,\omega) = i\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\varphi(x+\omega z)\,\frac{dz}{\sin\pi z} \qquad \left(0 < \omega < \frac{\pi}{k}\right),$$

$$(18) \quad \mathrm{F}(x\,|\,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(x+\omega z)\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 dz \qquad \left(0 < \omega < \frac{2\pi}{k}\right).$$

Ici α est un nombre quelconque entre 0 et -1 et l'on suppose que $\mathfrak{R}(x) > b$. En déformant convenablement les chemins d'intégration, on voit, à l'aide de ces deux intégrales, que $\mathrm{G}\left(x\,\middle|\,\frac{\omega}{2}\right)$ et $\mathrm{F}(x\,|\,\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω holo-

morphes tant que x reste à l'intérieur du demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$ et que ω reste à l'intérieur d'un cercle ayant le point $\frac{\pi}{k}$ pour centre et avec le rayon $\frac{\pi}{k}$. Quand les variables sortent de ces deux domaines, il arrive que les fonctions cessent d'exister. Si l'on veut pouvoir les prolonger, il faut ajouter des hypothèses nouvelles relativement à la fonction $\varphi(x)$. Nous considérons deux cas différents qui sont assez intéressants.

Supposons, en premier lieu, que $\varphi(x)$ soit une fonction entière qui satisfait à l'inégalité (16) pour toute valeur de x quand ε est positif, pendant qu'une telle inégalité cesse d'être vraie si ε est négatif. Alors on démontre, à l'aide des deux intégrales, que les fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ sont holomorphes pour toute valeur finie de x et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{\pi}{k}$ respectivement à l'intérieur du cercle [1] $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$. Il y a toujours un point singulier sur les circonférences de ces cercles. Les quatre séries de puissances (14) convergent à l'intérieur des deux cercles. On en conclut, en remplaçant ω par $-\omega$, que les fonctions G et F satisfont aux relations suivantes :

$$G(x - \omega \,|\, -\omega) = G(x \,|\, \omega),$$
$$F(x - \omega \,|\, -\omega) = F(x \,|\, \omega).$$

6. Supposons, en second lieu, que $\varphi(x)$ soit une fonction uniforme de x, admettant à distance finie un nombre fini de points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et que l'inégalité (16) soit satisfaite pour toute valeur de x, à l'extérieur d'un cercle comprenant les points singuliers. Considérons les intégrales (17) et (18). En déformant d'une manière convenable les chemins d'intégration de manière à éviter les points singuliers, on peut prolonger analytiquement les fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ dans tout le plan des x et dans la partie du plan des ω qui est à l'intérieur des deux cercles dont nous venons de parler. On démontre qu'elles sont des fonctions uniformes de x admettant les points singuliers

$$x = \beta_\nu,\ \beta_\nu - \omega,\ \beta_\nu - 2\omega,\ \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1] Si $k = 0$, les deux cercles sont à remplacer par tout le plan des ω.

et étant d'ailleurs holomorphes. $G(x|\omega)$ est encore une fonction uniforme de ω à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{\pi}{k}$. Le point $\omega = 0$ est un point singulier essentiel et il y a une infinité de points singuliers à l'intérieur du cercle. Ces points singuliers sont tous situés sur n rayons vecteurs.

$F(x|\omega)$ est, au contraire, une fonction non uniforme de ω au voisinage du point $\omega = 0$. En désignant par B la somme des résidus de la fonction $\varphi(x)$ dans les points β_ν, on démontre que F est de la forme

$$F(x|\omega) = B \log \omega + F_1(x|\omega),$$

$F_1(x|\omega)$ étant une fonction uniforme de ω à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$. Je prends, dans le plan des ω, la partie négative de l'axe imaginaire comme coupure. Donnons à x une valeur fixe différente des β_ν. La fonction $F(x|\omega)$ admet, comme fonction de ω, à l'intérieur du cercle $|\omega| = \frac{2\pi}{k}$ une infinité de points singuliers tous situés sur n rayons vecteurs et admettant le point $\omega = 0$ comme point limite. Quand on fait varier x, les *vecteurs singuliers* tournent. Quand x décrit un petit cercle autour d'un des points singuliers β_ν, un des vecteurs singuliers fait une rotation complète dans le plan des ω.

Soit b (respectivement $\bar{b}$) la partie réelle de celui des nombres β_ν dont la partie réelle est la plus grande (respectivement la plus petite). Si ω est positif et plus petit que $\frac{\pi}{k}$, l'intégrale au second membre de (17) représente la fonction $G(x|\omega)$ dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$. Si ω est négatif et plus grand que $-\frac{\pi}{k}$, elle représente encore la même fonction dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) < \bar{b}$.

Posons, pour abréger [1] :

$$p(x|\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \mathcal{L} \frac{(\varphi(z))}{\sin \frac{\pi}{\omega}(x - z)}.$$

---

[1] On sait que Cauchy désigne par la notation

$$\mathcal{L}(\varphi(z))\psi(z)$$

la somme des résidus de l'expression $\varphi(z)\psi(z)$ relatifs aux points singuliers à distance finie de la fonction $\varphi(z)$.

Si $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$, l'intégrale au second membre de l'équation (17) représente la fonction

$$G(x \mid \omega) - p(x \mid \omega)$$

dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) \leqq \bar{b}$. Si $0 > \omega > -\frac{\pi}{k}$, cette intégrale représente encore cette fonction dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$. De ces faits, on peut, entre autres, conclure que la fonction G satisfait à la relation

$$G(x - \omega \mid -\omega) = G(x \mid \omega) - p(x \mid \omega);$$

$p(x)$ est évidemment une fonction périodique [1] de x, qui satisfait à la relation

$$p(x + \omega \mid \omega) = -p(x \mid \omega).$$

Cette fonction peut se représenter par l'expression suivante :

$$p(x \mid \omega) = 2 \lim_{\eta = 0} \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)^2}.$$

En particulier, on a

$$p(x \mid \omega) = 2 \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega)$$

si cette série converge.

Passons à la fonction F et remarquons d'abord que $f(x)$ est une fonction non uniforme de x. Mais en fixant les branches de cette fonction convenablement, on démontre que l'intégrale au second membre de l'équation (18) représente la fonction $F(x \mid \omega)$ dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$, si $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$. Mais si $0 > \omega > -\frac{2\pi}{k}$, elle représente encore la même fonction dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) \leqq \bar{b}$.

Posons, pour abréger :

$$\Pi(x \mid \omega) = -\pi i B + \int (\varphi(z))\pi \cot \frac{\pi}{\omega}(z - x).$$

---

[1] $p(x \mid \omega)$ est en particulier une fonction rationnelle de $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$, si les β_ν sont des pôles de la fonction $\varphi(x)$

Si $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$, l'intégrale au second membre de (18) représente la fonction

$$F(x \mid \omega) - \Pi(x \mid \omega)$$

dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) \leqq \overline{b}$. Mais si $0 > \omega > -\frac{2\pi}{k}$, cette intégrale représente la fonction

$$F(x \mid \omega) - \Pi(x \mid \omega) - 2\pi i B$$

dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$. On a ainsi réalisé complètement le prolongement analytique de la solution $F(x \mid \omega)$ et l'on conclut de ces faits qu'elle satisfait à la relation suivante :

$$F(x - \omega \mid -\omega) = F(x \mid \omega) - \Pi(x \mid \omega),$$

qui exprime une des principales propriétés de cette fonction. Au sujet de la fonction $F(x \mid -\omega)$, on peut encore remarquer qu'elle se représente, pour des valeurs positives de ω, par l'expression suivante :

$$F(x \mid -\omega) = \lim_{\eta=0} \left[\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x - s\omega)\, e^{-\eta(x-s\omega)^2} - \int_{-\infty}^{a} \varphi(z)\, e^{-\eta z^2}\, dz \right].$$

Supposons, pour fixer les idées, que $a > b$. Dans le second membre, il faut intégrer de $-\infty$ jusqu'à $\overline{b}$ le long de l'axe réel, puis de $\overline{b}$ jusqu'à b le long d'une courbe située au-dessus de l'axe réel et laissant tous les points β_ν du côté droit de la courbe, et enfin de b jusqu'à a. $\Pi(x \mid \omega)$ est une fonction périodique de x avec la période ω. Elle est égale à

$$\Pi(x \mid \omega) = \lim_{\eta=0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)\, e^{-\eta z^2}\, dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega)\, e^{-\eta(x+s\omega)^2} \right].$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LE CONGRÈS INTERNATIONAL DE MATHÉMATIQUES DE STRASBOURG.

Un Congrès international de mathématiques s'est réuni à Strasbourg du 22 au 30 septembre dernier. Ce Congrès avait été décidé en principe à la troisième session de la Conférence interalliée des Académies scientifiques, tenue à Bruxelles en juillet 1919. Des invitations personnelles ont été lancées au mois de décembre dernier, par les soins du Comité national français de Mathématiques, aux savants des pays alliés et amis. Pour le moment, nous pensons faire suffisamment connaître la physionomie de cette réunion, en donnant les discours prononcés par M. Émile Picard, président du Congrès, à la séance d'ouverture et à la séance de clôture. Cette dernière fut présidée par M. Alapetite, Commissaire général de la République en Alsace-Lorraine.

Les nombreuses et importantes communications entendues au Congrès paraîtront dans un Ouvrage, dont nous parlerons ultérieurement. Nous espérons pouvoir publier bientôt ici quelques-unes des conférences générales qui ont été faites.

Ajoutons seulement que, outre le Commissaire général, M. le Ministre des Affaires étrangères, M. le Maire et M. le Président de la Chambre de Commerce de Strasbourg se sont intéressés à ce premier Congrès scientifique international d'après-guerre. Il en a été de même de plusieurs sociétés industrielles et financières d'Alsace-Lorraine et de nombreux particuliers qui avaient compris l'importance de cette manifestation scientifique. Leurs dons généreux ont facilité les conditions matérielles du Congrès, et permettront une publication d'un grand intérêt pour les sciences mathématiques.

La Rédaction.

Allocution de M. Émile Picard.

(Séance d'ouverture.)

Mesdames, Messieurs,

Au nom du Comité national français de Mathématiques et du Comité d'organisation de ce Congrès, je remercie M. le Commissaire général d'avoir bien voulu se faire représenter à cette séance d'inauguration. En souhaitant la bienvenue aux amis de notre pays, qui ont répondu à notre appel, M. le Commissaire général et M. le Recteur de l'Université ont montré l'intérêt que le Gouvernement de la République porte aux progrès des sciences. Quand nous vous avons proposé de vous réunir à Strasbourg, nous avons pensé rendre hommage à la noble terre d'Alsace, revenue à cette patrie française, à laquelle la rattachent ses antiques origines et des sympathies restées toujours vivaces à travers les péripéties de son histoire. Nous avons aussi voulu honorer l'Université de Strasbourg qui, depuis le XVIe siècle, a compté tant de maîtres distingués. Les hommes éminents qui y enseignent aujourd'hui tiennent dignement le rôle que leur imposent les tragiques événements de ces dernières années, en faisant d'eux les pionniers de la culture généreuse et humaine que fut toujours la culture française. Nous prions le Conseil de l'Université d'agréer l'expression de notre gratitude pour la gracieuse hospitalité qu'il nous offre dans ce Palais. Comment ne pas rappeler en ce lieu l'admirable conduite de tant de maîtres de notre enseignement dans la guerre qui vient de finir; leur foi patriotique a contribué à la victoire commune, qui nous permet aujourd'hui de nous réunir dans la ville de Strasbourg. Je tiens à saluer particulièrement l'un des plus jeunes maîtres de cette Université, qui porte sur son visage les traces glorieuses de son héroïsme.

Nous sommes aussi très reconnaissants au Comité local, formé de professeurs de la Faculté des Sciences, qui, sous l'active direction de M. Henri Villat, a eu la lourde charge de régler nos séances et d'organiser les réceptions et les promenades, dont

le charme tempérera l'austérité de nos travaux. Nos collègues de Strasbourg ont considéré, en effet, qu'ils avaient le devoir de faire connaître à nos hôtes quelque chose de cette Alsace, dont le nom est devenu un symbole. Nous voulons espérer que tous les Congressistes en emporteront un touchant souvenir.

Il m'est enfin particulièrement agréable de remercier M. le Maire et M. le Président de la Chambre de Commerce de Strasbourg, ainsi que les représentants de nombreuses sociétés alsaciennes et autres généreux bienfaiteurs de ce Congrès, dont les libéralités nous sont extrêmement précieuses et permettront des publications témoignant de l'activité scientifique de cette réunion.

Dans un article récent, plein de remarques pénétrantes sur l'enseignement des mathématiques en divers pays, un professeur de cette Université évoquait le souvenir de deux mathématiciens, qui y enseignèrent jadis : *Sarrus*, dont le nom restera dans l'histoire du calcul des variations, et *Arbogast* qui apparaît comme un précurseur du Calcul fonctionnel. J'ajouterai à ces deux noms de mathématiciens celui, peut-être inattendu, de *Pasteur*. Le jeune savant, qui vint ici en 1849 enseigner la Chimie, ne se montrait-il pas alors quelque peu géomètre. Les Mémoires célèbres de Pasteur sur l'hémiédrie et la polarisation rotatoire, qui datent de cette époque, relèvent de la Géométrie : géométrie bien pittoresque d'ailleurs, où certains champignons microscopiques se montrent habiles mathématiciens, puisqu'ils savent distinguer, pour s'en nourrir, entre un cristal droit et un cristal gauche. C'est par la voie de la Géométrie que Pasteur est entré dans l'étude des fermentations. Strasbourg peut être fier d'avoir compté ce grand homme parmi ses maîtres.

Messieurs, c'est un des objets des Congrès, comme celui que nous inaugurons aujourd'hui, d'établir des relations personnelles entre les chercheurs qui cultivent la même science ou des sciences voisines. Après l'effroyable tourmente de ces dernières années, qui a rompu tant de liens, les rapprochements sont nécessaires entre savants qui s'estiment et qui, sans aucune arrière-pensée, n'ont d'autre souci que le culte désintéressé de la vérité. Ils sont particulièrement utiles aux mathématiciens qui ont parfois montré quelque tendance à s'isoler dans des parties très limitées de leur science. De larges esquisses, faisant connaître l'état actuel de

quelques grandes questions, doivent être un des attraits de réunions comme la nôtre, et peuvent exercer la plus heureuse influence. Les mathématiciens passent quelquefois pour des personnages un peu originaux, ensevelis dans leurs symboles et perdus dans leurs abstractions. Il importe que le public cultivé, de formation parfois trop exclusivement littéraire, ait une opinion plus juste à cet égard. Non, la Mathématique n'est pas la science étrange et mystérieuse que se représentent tant de gens; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la philosophie naturelle.

Toute théorie physique, suffisamment élaborée, prend nécessairement une forme mathématique; il semble que les actions et réactions entre l'esprit et les choses ont amené peu à peu à former des moules où peut, partiellement au moins, s'insérer le réel. Certes, beaucoup de concepts créés par les mathématiciens n'ont pas trouvé encore d'applications dans l'étude des phénomènes physiques, mais l'histoire de la science montre qu'il serait téméraire d'affirmer que telle ou telle notion ne sera pas un jour utilisée. Les géomètres aiment à rappeler le mot du grand mathématicien Lagrange, qui, comparant un jour les Mathématiques à un animal dont on mange toutes les parties, disait : « Les Mathématiques sont comme le porc, tout en est bon. »

Le métier de prophète est toujours dangereux. Quelques-uns pensent cependant que les applications des mathématiques seront surtout étudiées dans les années qui vont venir et que la théorie pure sera quelque peu négligée par les jeunes générations. Le temps où nous vivons devient en effet singulièrement dur dans tous les domaines pour les ouvriers de l'intelligence, et les plus optimistes se demandent parfois avec inquiétude si la civilisation, telle que nous sommes habitués à l'envisager, ne va pas subir une éclipse. Aussi ne devons-nous pas nous lasser de répéter que les spéculations théoriques sont en dernière analyse la véritable source de tous les progrès dans les sciences appliquées. Si, par malheur, la recherche désintéressée cessait d'être possible, le capital scientifique accumulé dans les âges antérieurs s'épuiserait rapidement, et l'on ne continuerait pas longtemps à vivre du parfum d'un vase vide, comme disait Renan pour un autre objet. Quoi qu'il advienne, on trouvera toujours parmi les mathématiciens des incorrigibles idéalistes qui, semblables à la femme de

l'Evangile, croiront avoir choisi la meilleure part en scrutant les propriétés de l'espace et en analysant dans ses recoins les plus subtils l'idée de fonction; elle ne leur sera pas ôtée. C'est dans l'espérance que les mathématiques pures et les mathématiques appliquées continueront leur collaboration féconde, que nous commençons les travaux de ce Congrès, où de très nombreuses communications nous ont été promises, et où d'éminents géomètres voudront bien nous faire quelques conférences générales sur les progrès et les tendances de la science qui nous est chère. Que tous ceux qui vont ainsi contribuer à l'éclat de cette réunion veuillent bien recevoir par avance les remerciements du Comité d'organisation.

ÉMILE PICARD.

Allocution de M. Émile Picard.

(Séance de clôture.)

MONSIEUR LE COMMISSAIRE GÉNÉRAL,

Au nom des congressistes, je remercie le Gouvernement français dont vous êtes ici le représentant, de l'intérêt qu'il a pris à cette réunion internationale. Nous sommes heureux de saluer dans cette séance de clôture l'administrateur éminent qui, dans sa brillante carrière, s'est toujours montré à la hauteur des situations les plus délicates, et qui continue dignement ici la tâche commencée par son illustre prédécesseur, que la confiance du Parlement, et, on peut le dire, du pays, vient d'élever à la présidence de la République.

MESDAMES, MESSIEURS,

Quand la réunion, à Strasbourg, d'un Congrès international de Mathématiques fut définitivement annoncée au mois de décembre dernier, quelques personnes timorées nous représentèrent que l'entreprise était prématurée. La question était cependant loin d'être nouvelle. La reprise des relations internationales avait été étudiée longuement à Londres et à Paris, en octobre et no-

vembre 1918, dans deux conférences interacadémiques, où figuraient des représentants des puissances alors en guerre avec les empires centraux. Dans ces réunions, il fut insisté fortement sur ce point que les guerres antérieures n'avaient pas détruit la mutuelle estime des savants belligérants les uns pour les autres, et que la paix, alors, avait pu effacer, après peu d'années, les traces du passé. « Mais aujourd'hui », concluaient à l'unanimité les délégués des pays alliés, « les conditions sont tout autres. Des crimes sans nom vont laisser dans l'histoire des nations coupables une tache que des signatures au bas d'un traité de paix ne sauraient laver. Aussi devrons-nous abandonner les anciennes associations internationales et en créer de nouvelles avec le concours éventuel des neutres. » Tels sont les principes qui ont guidé les décisions prises d'abord à Londres et à Paris, confirmées et précisées dans une nouvelle conférence tenue à Bruxelles, l'année dernière. Un Conseil international de recherches fut créé, auquel se rattacheraient, par l'adhésion à certaines idées générales, mais en gardant une large indépendance, des Unions internationales se rapportant aux différents ordres de sciences. La question des Congrès internationaux relèverait de l'Union correspondante. Enfin, les nations neutres seraient priées d'adhérer au Conseil international de recherches ainsi qu'aux diverses Unions.

Ce programme est en grande partie réalisé aujourd'hui. Nous avons l'adhésion d'un grand nombre de pays au Conseil international de recherches. L'Union astronomique, l'Union géodésique et géophysique, l'Union chimique, d'autres encore, enfin l'Union mathématique ont été fondées. Nous avons, ici même, mercredi dernier, prié les pays neutres d'adhérer à cette dernière Union, et nous ne doutons pas qu'ils répondront à notre appel. C'est conformément à ce plan général que fut convoqué le Congrès actuel, dont j'ai cru devoir vous retracer sommairement la genèse.

Messieurs, le monde de 1920 est bien différent de celui du début de 1914 et il est peu d'hommes de science qui soient aujourd'hui disposés à s'isoler dans une tour d'ivoire : quoique savants, nous restons hommes. Vous venez de voir que le problème des relations internationales a été repris à pied d'œuvre. Dans chaque ordre de sciences, tout Congrès scientifique, rattaché au Conseil international de recherches, et qui se réunira pour la première fois dans

les années prochaines sera essentiellement nouveau ; je veux dire qu'il ne s'insèrera dans aucune suite déjà commencée.

En ce qui regarde spécialement notre Congrès, nous n'avons jamais dissimulé que nous entendions lui donner une signification particulière en le réunissant à Strasbourg. Aussi, avons-nous été extrêmement touchés de l'empressement avec lequel nos amis étrangers ont répondu à notre appel. Arrivés dans cette ville, ils se sont laissés, comme nous, pénétrer par l'atmosphère alsacienne, et beaucoup, j'en suis certain, se sont livrés à des réflexions que, loin d'ici, ils n'avaient pas été amenés à faire. Des liens plus intimes ont été formés, qui resteront précieux. Nous continuerons ainsi, entre peuples amis, nos travaux scientifiques, apportant dans cette collaboration nos qualités diverses, sans qu'aucun prétende exercer une insupportable hégémonie, et sans nous soucier de certaines menaces, qu'avec une impudeur qui ne nous étonne pas, on a osé proférer.

Quant à certaines relations qui ont été rompues par la tragédie de ces dernières années, nos successeurs verront si un temps suffisamment long et un repentir sincère pourront permettre de les reprendre un jour, et si ceux qui se sont exclus du concert des nations civilisées sont dignes d'y rentrer. Pour nous, trop proches des événements, nous faisons encore nôtre la belle parole du cardinal Mercier, d'après laquelle « pardonner à certains crimes, c'est s'en faire le complice ».

A tout point de vue, le Congrès qui va se terminer a réussi au delà de nos espérances. Nos diverses sections ont entendu des communications de haute importance, et les conférences générales qui nous ont été faites ont été très brillantes. Les sujets les plus variés d'analyse, de géométrie, de mécanique et de physique mathématique, ainsi que des questions intéressant l'enseignement et l'histoire des sciences, ont été abordés. La théorie de la relativité, si à la mode aujourd'hui, ne pouvait manquer de faire l'objet de quelques discussions. Certains ne peuvent parler sans passion de cette théorie qui est devenue, pour eux, comme une sorte de religion. L'avenir dira si la théorie générale de la relativité est autre chose qu'une construction purement formelle et mathématique, ou bien si les psychologues ont raison, qui considèrent que des hypothèses, incapables d'être saisies par l'intuition, ne sont

pas susceptibles d'être à la base d'une explication du monde physique. Une conséquence de la théorie peut cependant nous intéresser ici, c'est qu'on vieillit moins vite quand on se déplace rapidement. Il est donc bon de beaucoup voyager, résultat propice au succès des Congrès internationaux.

Il ne me reste qu'un devoir agréable à remplir. J'ai déjà remercié par avance, dans la séance d'inauguration, quelques-uns des organisateurs de ce Congrès, en particulier les membres du Comité local et son infatigable président, M. Henri Villat. Je veux aujourd'hui, en terminant, dire la gratitude de tous à celui qui fut l'ouvrier de la première heure, à notre dévoué Secrétaire général, M. Gabriel Kœnigs. Il n'a jamais douté du succès : qu'il soit à l'honneur, après avoir été à la peine.

ÉMILE PICARD.

MÉLANGES.

SUR L'ÉTAT ACTUEL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

(*suite et fin*);

PAR M. N.-E. NÖRLUND.

Reprenons les quatre séries de puissances (14). Nous venons de voir que les fonctions G et F admettent une infinité de points singuliers au voisinage du point $\omega = 0$. Les quatre séries divergent donc. Mais en considérant ω comme la variable, on démontre que la série (14), par exemple, représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ d'une part dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geqq \arg\omega \geqq -\frac{\pi}{2}$, pourvu que $\mathfrak{U}(x) > b$, et d'autre part, dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geqq \arg\omega \geqq \frac{\pi}{2}$, pourvu que $\mathfrak{U}(x) \leqq \bar{b}$. Mais cette série représente asymptotiquement la fonction

$$G(x\,|\,\omega) - p(x\,|\,\omega) = G(x - \omega\,|\,-\omega),$$

d'une part, dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geqq \arg\omega \geqq -\frac{\pi}{2}$, si $\mathfrak{U}(x) \leqq \bar{b}$, et, d'autre part, dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geqq \arg\omega \geqq \frac{\pi}{2}$, si $\mathfrak{U}(x) > b$.

De même on démontre que la série (14″) représente asymptotiquement, dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geqq \arg\omega \geqq -\frac{\pi}{2}$, la fonction $F(x|\omega)$, pourvu que $\mathfrak{U}(x) > b$, mais elle représente la fonction

$$F(x|\omega) - \Pi(x|\omega),$$

si $\mathfrak{U}(x) \leqq \bar{b}$. La même série représente asymptotiquement, dans l'angle $\frac{3\pi}{2} \geqq \arg\omega \geqq \frac{\pi}{2}$, la fonction $F(x|\omega)$, si $\mathfrak{U}(x) \leqq \bar{b}$, et la fonction

$$F(x|\omega) + \Pi(x|-\omega),$$

si $\mathfrak{U}(x) > b$. Si les points singuliers β_ν de la fonction $\varphi(x)$ sont des pôles, on démontre qu'on a, quel que soit l'entier m,

$$\lim_{\omega=0} \omega^{-m} p(x|\omega) = 0,$$
$$\lim_{\omega=0} \omega^{-m} [\pi(x|\omega) + c] = 0.$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur différent des vecteurs singuliers. c est une constante qui passe d'une valeur à une autre quand l'argument de ω change.

On en conclut que la série (14) représente asymptotiquement la fonction $G(x|\omega)$ sur tout rayon vecteur différent des n vecteurs singuliers.

Supposons, pour fixer les idées, que $\mathfrak{U}(x) > b$ et que les β_ν soient rangés de sorte que

$$\arg(\beta_{\nu+1} - x) \geqq \arg(\beta_\nu - x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Soit B_ν le résidu de la fonction $\varphi(x)$ dans le point β_ν. Alors la série (14″) représente asymptotiquement la fonction

$$F(x|\omega) - 2\pi i \sum_{\nu=1}^{p} B_\nu$$

dans l'angle

$$\arg(\beta_{p+1} - x) > \arg\omega > \arg(\beta_p - x).$$

La valeur asymptotique de la fonction $F(x|\omega)$ fait donc un

saut brusque quand ω franchit un des vecteurs singuliers. Ce saut brusque est égal à une des périodes de l'intégrale $\int_a^x \varphi(x)\,dx$. On a donc, en particulier,

$$\lim_{\omega=0} G(x \mid \omega) = \varphi(x),$$

$$\lim_{\omega=0} F(x \mid \omega) = \int_a^x \varphi(x)\,dx,$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. Mais la détermination qu'il faut choisir de l'intégrale au second membre change avec l'argument de ω.

7. Je vais encore signaler quelques autres développements qui sont très remarquables. Soit $0 < \omega < \frac{2\pi}{\lambda}$ et supposons que $\varphi(x)$ satisfasse aux conditions du paragraphe 5. On démontre que

$$G\left(x \middle| \frac{\omega}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{(s+1)!} \frac{\Delta^s}{\omega} \varphi(x),$$

$$G\left(x - \frac{\omega}{2} \middle| \frac{\omega}{2}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{1.3.5\ldots(2s+1)}{(s+1)!} \frac{\Delta^s}{\omega} \varphi(x).$$

La première de ces séries converge dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b - \frac{\omega}{2}$ et la seconde converge dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b + \frac{\omega}{2}$. On a encore

$$G(x \mid \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{\Delta^s}{\omega} \varphi(x),$$

et cette série converge pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de la fonction $G(x \mid \omega)$. En posant

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx,$$

on démontre de même que

$$F(x \mid \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s+1} \omega^s \frac{\Delta^s}{\omega} f(x),$$

$$F(x - \omega \mid \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \omega^s \frac{\Delta^s}{\omega} f(x) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{s+1}\right).$$

La première de ces séries converge dans le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > b$ et la seconde converge si $\mathfrak{R}(x) > b + \omega$.

8. Pour la recherche effective des fonctions F et G, on a souvent besoin d'un procédé de sommation *par parties* qui permet de transformer une somme en une autre. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions qui satisfont à l'une ou l'autre des conditions précédentes, on démontre que

$$\mathbf{S}\,\varphi(x)\,\underset{\omega}{\nabla^n}\psi(x)\,\underset{\omega}{\nabla x} = (-1)^n\left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathbf{S}\,\psi(x+n\omega)\,\underset{\omega}{\Delta^n}\varphi(x)\,\underset{\omega}{\nabla x}$$
$$+\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s \underset{\omega}{\nabla^{n-s-1}}\,\psi(x+s\omega)\,\underset{\omega}{\Delta^s}\varphi(x).$$

On peut donc ramener l'une à l'autre ces deux sommes. Posons en particulier $\omega = 1$ et $\psi(x) = a^x$, il vient

$$\mathbf{S}\,a^x\,\varphi(x)\,\nabla x = \frac{2a^x}{a+1}\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\left(\frac{a}{a+1}\right)^s \Delta^s\varphi(x)$$
$$+(-1)^n\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \mathbf{S}\,a^x\,\Delta^n\varphi(x)\,\nabla x.$$

On trouve de même

$$\mathbf{S}\,\varphi(x)\,\underset{\omega}{\Delta^n}\psi(x)\,\underset{\omega}{\nabla x} = \left(\frac{2}{\omega}\right)^n \mathbf{S}\,\psi(x+n\omega)\,\underset{\omega}{\nabla^n}\varphi(x)\,\underset{\omega}{\nabla x}$$
$$-\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{2}{\omega}\right)^{s+1}\underset{\omega}{\nabla^s}\varphi(x)\,\underset{\omega}{\Delta^{n-s-1}}\,\psi(x+s\omega),$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\varphi(x)\,\underset{\omega}{\Delta^n}\psi(x)\,\underset{\omega}{\Delta x} = (-1)^n \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\underset{\omega}{\Delta^n}\varphi(x)\,\psi(x+n\omega)\,\underset{\omega}{\Delta x}$$
$$+\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\underset{\omega}{\Delta^s}\varphi(x)\,\underset{\omega}{\Delta^{n-s-1}}\,\psi(x+s\omega)+c,$$

c étant une constante. En posant, en particulier, $\psi(x) = a^x$, il vient

$$\mathbf{S}\,a^x\,\varphi(x)\,\nabla x = \frac{2a^x}{1-a}\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{2a}{a-1}\right)^s \nabla^s\varphi(x) + \left(\frac{2a}{a-1}\right)^n \mathbf{S}\,a^x\,\nabla^n\varphi(x)\,\nabla x,$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}^{x}a^x\,\varphi(x)\,\Delta x = \frac{a^x}{a-1}\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{a}{1-a}\right)^s \Delta^s\varphi(x) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n \mathop{\mathbf{S}}_{\alpha}^{x}a^x\,\Delta^n\varphi(x)\,\Delta x + c.$$

Ces relations peuvent rendre des services considérables dans l'étude des fonctions F et G.

9. On peut étendre une partie des résultats précédents à des équations d'ordre quelconque. Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ des nombres positifs quelconques. La différence d'ordre n est, par définition, égale à

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta^n} F(x) = \underset{\omega_n}{\Delta}\left[\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}{\Delta^{n-1}} F(x)\right].$$

Posons de même

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} F(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\left[\underset{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}{\nabla^{n-1}} F(x)\right].$$

Pour abréger, j'écris quelquefois $\underset{\omega_i}{\Delta^n}$ au lieu de $\underset{\omega_1, \ldots \omega_n}{\Delta^n}$. Considérons les équations

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta^n} F(x) = \varphi(x), \tag{19}$$

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} G(x) = \varphi(x). \tag{20}$$

Supposons que $\varphi(x)$, pour $x \geqq a$, admette une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre $m+1$, telle que

$$\lim_{x=\infty} x^{n+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0. \tag{21}$$

Posons $\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \ldots + s_n\omega_n$ et considérons la série

$$2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \varphi(x+\Omega)\, e^{-\eta(x+\Omega)},$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Cette série converge pour toute valeur positive de η et elle tend uniformément vers une limite, quand le nombre η tend vers zéro. Cette limite représente une fonction continue de x et des ω_i, soit $G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, qui satisfait à l'équation (20). Par analogie avec ce qui précède, nous désignerons encore la limite susdite par le symbole

$$G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \mathbf{S}\, \varphi(x) \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} x.$$

Soient $E_\nu^{(n)}(x)$ les polynomes d'Euler, c'est-à-dire les polynomes qui satisfont à l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} E_\nu^{(n)}(x) = x^\nu.$$

On démontre que

$$E_\nu^{(n)}(x) = \mathop{\mathrm{S}}\, x^\nu \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} x.$$

Soit $\dot{E}_\nu^{(n)}$ une fonction qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla^n} \dot{E}_\nu^{(n)}(x) = 0$$

et qui est égale au polynome d'Euler $E_\nu^{(n)}(x)$ dans l'intervalle

$$0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n.$$

Soit h un nombre quelconque dans cet intervalle. On démontre que la fonction G_n admet un développement de la forme

$$(22) \quad G_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\dot{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

Soient $B_\nu^{(n)}(x)$ les polynomes de Bernoulli [1] et considérons l'expression

$$(23) \quad \int_a^\infty \frac{B_{n-1}^{n}(x-z)}{(n-1)!} \varphi(z) e^{-\eta z} dz + (-1)^n \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n \sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives des s_i. Cette expression a un sens pour toute valeur positive de η; quand η tend vers zéro, elle tend uniformément vers une limite et donne ainsi naissance à une fonction continue de x et des ω_i, soit $F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Par définition, cette fonction sera la solution principale de l'équation (19). Nous désignerons encore la limite de l'expression (23) par le symbole

$$(24) \quad F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta^n} z.$$

On démontre aisément qu'on a, si $\nu \geqq n$,

$$B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu-1) \ldots (\nu-n+1) \mathop{\mathrm{S}}_0^x x^{\nu-n} \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta^n} x.$$

---

[1] *Voir* au sujet de ces polynomes quatre Notes dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 169, 1919, p. 166, 221, 521, 608.

Cela posé, soit $\dot{B}_\nu^{(n)}(x)$ une fonction qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\Delta^n} \dot{B}_\nu^{(n)}(x) = 0,$$

et qui est égale au polynome de Bernoulli dans l'intervalle

$$0 \leq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n.$$

Posons, pour abréger,

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\, dz.$$

La fonction $F_n(x)$ admet un développement de la forme

$$(25) \quad F_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n+m} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\dot{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

Quand on fait tendre m vers l'infini, les séries (22) et (25) divergeront en général, mais elles possèdent la même propriété que les séries (14), elles représentent asymptotiquement les fonctions G_n et F_n pour des valeurs positives et très petites des ω_i. D'autre part, en laissant les ω_i fixes, on démontre que les termes restes tendent vers zéro quand x augmente indéfiniment. On voit donc immédiatement, à l'aide des deux séries, comment se comportent les fonctions $F_n(x)$ et $G_n(x)$ pour des valeurs positives et très grandes de x.

G_n et F_n sont des fonctions symétriques de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ et il y a entre ces fonctions un grand nombre de relations qui sont assez remarquables. On a d'abord

$$\underset{\omega_n}{\nabla} G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = G_{n-1}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}),$$

$$\underset{\omega_n}{\Delta} F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = F_{n-1}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}).$$

Inversement, on démontre que :

$$\mathrm{S}\left[\mathrm{S}\, \varphi(x) \underset{\omega_i}{\nabla^n} x\right] \underset{\omega_s}{\nabla^p} x = \mathrm{S}\, \varphi(x) \underset{\omega_i}{\nabla^{n+p}} x,$$

$$\mathrm{S}\left[\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \underset{\omega_i}{\Delta^n} x\right] \underset{\omega_i}{\nabla^n} x = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \underset{2\omega_i}{\Delta^n} x,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a_q}^x \left[\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \underset{\omega_i}{\Delta^n} x\right] \underset{\omega_s}{\Delta^p} x = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \underset{\omega_i}{\Delta^{n+p}} x + q(x),$$

$q(x)$ étant un polynome d'ordre $p-1$. Quand un ou plusieurs des ω_i tendent vers zéro, les fonctions G_n et F_n tendent vers des limites finies. On a, par exemple,

$$\lim_{\omega_n=0} G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = G_{n-1}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}),$$

$$\lim_{\omega_n=0} \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega_i}^n x = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \left[\int_a^x \varphi(z)\, dz \right] \Delta_{\omega_i}^{n-1} x.$$

Quand on fait tendre tous les ω_i vers zéro, on trouve

$$\lim \mathop{\mathrm{S}}_{\omega_i} \varphi(x) \nabla_{\omega_i}^n x = \varphi(x),$$

$$(26) \qquad \lim \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(x) \Delta_{\omega}^n x = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\, dz.$$

10. Soient $m_1, m_2, m_3, \ldots$ des entiers positifs quelconques. Remplaçons, dans l'expression (23), x par $x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n}$ et donnons aux s_i les valeurs $0, 1, \ldots, m_i - 1$. En ajoutant ensemble toutes les équations ainsi obtenues et en faisant ensuite tendre η vers zéro, on trouve la relation remarquable suivante :

$$(27) \quad \sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} F_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right)$$
$$= m_1 m_2 \ldots m_n F_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

De la même manière, on démontre que

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} G_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right)$$
$$= G_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n}\right),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant des entiers positifs impairs, et que

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} F_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} + \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right)$$
$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^n \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n G_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n}\right),$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ étant des entiers positifs pairs quelconques. Si tous les m se réduisent à 2, il vient

$$\underset{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n}{\nabla^n} F_n(x \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n) = F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

$$\underset{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n}{\Delta^n} F_n(x \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n) = G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En divisant les deux membres de l'équation (27) par $m_1 m_2 \ldots m_n$ et en faisant ensuite tendre les m vers l'infini, on trouve, en tenant compte de l'équation (26),

$$\int_0^1 dt_n \ldots \int_0^1 F_n(x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \ldots + \omega_n t_n \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\, dt_1 = f(x).$$

On a de même

$$\int_0^1 dt_n \ldots \int_0^1 F_n(x + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \ldots + \omega_n t_n \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n)\, dt_1$$
$$= \mathop{\mathrm{S}}_{\omega_i} f(x) \nabla x.$$

11. Nous avons défini les fonctions F_n et G_n à l'aide de certaines séries généralement divergentes. Cette définition a l'avantage de pouvoir servir dans des cas assez étendus. Mais quand $\varphi(x)$ satisfait à la condition (21), on peut, des séries divergentes, en déduire d'autres qui convergent. En effet, soit r le plus petit entier positif, tel que

$$\lim_{x=\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0.$$

Posons

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x),$$

$$q(x) = \sum_{\nu=0}^{n+r-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x).$$

On a les deux développements suivants :

$$G_n(x+h) = p(x) + 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \left[\varphi(x+h+\Omega) - \underset{\omega_i}{\nabla^n} p(x+\Omega) \right],$$

$$F_n(x+h) = q(x) + (-1)^n \omega_1 \ldots \omega_n \sum \left[\varphi(x+h+\Omega) - \underset{\omega_i}{\Delta^n} q(x+\Omega) \right],$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs entières non

négatives des s_i. Il convient de remarquer que ces séries ne sont pas, en général, absolument convergentes. Nous avons choisi l'entier r aussi petit que possible pour donner aux séries la forme la plus simple; mais en augmentant la valeur de r, on peut souvent augmenter la rapidité de la convergence et, pour une certaine valeur de r, on arrive à une série absolument convergente.

Le dernier résultat peut aussi s'énoncer comme il suit : « La fonction $G_n(x+h)$ est égale à la limite de l'expression

$$p(x)+2^n\left[\sum_{s_n=0}^{m_n-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{m_1-1}(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n}\varphi(x+h+\Omega)-\underset{m_i\omega_i}{\nabla^n}p(x)\right]$$

quand les entiers impairs m_i tendent vers l'infini. La fonction $F_n(x+h)$ est égale à la limite de l'expression

$$q(x)+(-1)^n\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\left[\sum_{s_n=0}^{m_n-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{m_1-1}\varphi(x+h+\Omega)-m_1m_2\ldots m_n\underset{m_i\omega_i}{\Delta^n}q(x)\right]$$

quand les entiers positifs m_i tendent vers l'infini. »

12. Après avoir fait l'étude complète des équations dont nous venons de parler, on peut aborder avec fruit la théorie générale des équations aux différences finies. Mais cette recherche se fait encore, en grande partie, attendre. On s'est borné, jusqu'ici, à certains cas particuliers. Nous allons rendre compte de ceux qui sont les plus importants. Soit donnée une transformation birationnelle

$$z_i=R_i(y_1,y_2,\ldots,y_m)\qquad(i=1,2,\ldots,m),$$

relative à m lettres $y_1,y_2,\ldots,y_m$ et admettant le point double $y_1=y_2=\ldots=y_m=0$. M. Picard [1] a démontré l'existence d'un système de solutions $f_i(x)$ des équations aux différences finies

$$(1)\quad f_i(x+\omega)=R_i[f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x)]\qquad(i=1,2,\ldots,m),$$

ω étant un nombre positif. Ces solutions admettent, en outre, la

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 86, 1878, p. 657-660; t. 117, 1893, p. 472-476; t. 123, 1896, p. 1035-1037; *Acta math.*, t. XVIII, 1894, p. 133-154; t. XXIII, 1900, p. 333-337; *Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. XXX, 1913, p. 247-253.

période $2\pi i$ et elles sont uniformes et méromorphes dans tout le plan. La démonstration repose sur la belle méthode des approximations successives. Ces transcendantes de M. Picard sont très intéressantes. Une classe de fonctions analogues, mais plus particulières, a été étudiée par E.-E. Levi [1]. Il y aurait intérêt à poursuivre la voie ouverte par M. Picard, sa démonstration peut, avec des modifications convenables, s'étendre à bien d'autres cas. M. Horn l'a fait voir récemment dans plusieurs travaux. Cet auteur s'occupe [2] d'abord d'un système d'équations de la forme

$$f_i(x+1) = x^k \, G_i[x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

k étant un entier non négatif, les $G_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage du point $x = \infty$, $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ et s'annulant dans ce point. En se bornant au cas où la variable x *est un entier*, M. Horn détermine par des approximations successives les solutions $f_i(x)$ qui tendent vers zéro quand x augmente indéfiniment et il fait voir comment ces solutions se comportent pour des valeurs très grandes de l'entier x. En considérant x comme une variable complexe, M. Horn [3] démontre ensuite l'existence d'une solution analytique de l'équation

$$f(x+1) = a f(x) + G[x, f(x)],$$

pourvu que $|a| \gtrless 1$. M. Horn [4] s'est occupé aussi d'équations de la forme

$$x \Delta f(x) = G[x, f(x)]$$

en les reportant à des équations intégrales non linéaires. Ces équations aux différences sont analogues à une équation différentielle envisagée par Briot, Bouquet, Poincaré et M. Picard.

13. Dans l'étude de toutes ces équations, on n'a fait que le premier pas. Mais il y en a d'autres dont la théorie est beaucoup

---

(1) *Ann. Mat. pura ed appl.*, 3e série, t. XIV, 1907, p. 93. On peut citer aussi un Mémoire de M. Lattès dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. III, 1912, p. 73-124.

(2) *J. reine angew. Math.*, t. CXLI, 1912, p. 182-216.

(3) *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. XXVI, 1917, p. 230-251.

(4) *Math. Z.*, t. I, 1918, p. 80-114.

plus avancée. Ce sont les équations linéaires. On remplirait un volume en parlant de tout ce qui a été fait sur ce sujet. Je me place au point de vue de la théorie des fonctions et je ne parlerai pas des théories formelles et des analogies avec les équations algébriques et les équations différentielles. Ces théories ont été développées surtout par MM. Pincherle, Wallenberg et Guldberg et les deux derniers auteurs les ont exposées d'une manière excellente dans un Ouvrage récent : *Theorie der linearen Differenzengleichungen*. Je peux donc me borner aux travaux qui se rapportent à la théorie des fonctions.

Taylor, Lagrange et Laplace furent les ouvriers de la première heure. Lagrange résolut le problème des suites récurrentes et il appliqua aux équations aux différences la méthode de la variation des constantes. Laplace créa la théorie des fonctions génératrices et inventa la transformation qui porte son nom et au sujet de laquelle M. Pincherle a fait d'intéressantes remarques.

Un résultat essentiel a été obtenu par Poincaré [1]. Soit une équation linéaire de la forme suivante :

$$p_0(n)f(n) + p_1(n)f(n+1) + \ldots + p_{k-1}(n)f(n+k-1) + f(n+k) = 0,$$

la variable n étant un entier, les coefficients $p_i(n)$ étant des fonctions qui tendent vers des limites finies A_i quand n augmente indéfiniment. Envisageons l'équation caractéristique

$$\sum_{i=0}^{i=k} A_i z^i = 0,$$

et supposons que les racines α_i de cette équation soient telles que

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \ldots > |\alpha_k|.$$

Poincaré démontre que le rapport $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Cette limite est, en général, égale à α_1, mais pour certaines solutions particulières la limite est égale à une des autres racines. Ce théorème de Poincaré a été

---

(1) *Amer. J. Math.* t. VII, 1885, p. 203-258.

complété par MM. Pincherle ([1]), Horn, Perron ([2]), Ford ([3]), Erb et autres ([4]). M. Horn ([5]) a obtenu des séries divergentes qui représentent asymptotiquement les solutions pour des valeurs positives et très grandes de l'entier n. M. Perron ([6]) s'occupe en particulier du cas où l'équation caractéristique a deux racines égales et il démontre entre autres ce qui suit. Si, dans l'équation

$$\Delta^2 f(n) = p_1(n)\Delta f(n) + p_0(n) f(n),$$

les coefficients $p_0(n)$ et $p_1(n)$ restent non négatifs à partir d'une certaine valeur de n et tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, on peut affirmer que

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1,$$

pourvu que $f(n)$ ne s'annule pas pour toutes les valeurs positives et très grandes de n. Le théorème de Poincaré a été étendu à des systèmes d'équations linéaires par MM. Van Vleck ([7]) et Perron ([8]).

14. Je me suis occupé ([9]) des solutions analytiques d'une équation de la forme

$$(2) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} p_i(x) f(x+i) = 0,$$

([1]) *Acta math.*, t. XVI, 1893, p. 341-363; *Rom. Acc. L. Rend.*, 5e série, t. VII, 1898, p. 230-234.

([2]) *J. reine angew. Math.*, t. 136, 1909, p. 17-38; *Acta math.*, t. XXXIV, 1910, p. 109-137; *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. XIX, 1910, p. 129-137.

([3]) *Ann. Mat. pura ed appl.*, 3e série, t. XIII, 1907, p. 263-328; *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. X, 1909, p. 319-336.

([4]) *Voir*, par exemple, mon Mémoire dans les *Acta mathematica*, t. XXXIV, 1910, p. 1-108.

([5]) *Math. Ann.*, t. LIII, 1900, p. 177-192; *J. reine angew. Math.*, t. 138, 1910, p. 159-191.

([6]) *Sitzungsb. Akad. Heidelberg*, 1917, n° 17.

([7]) *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XIII, 1912, p. 342-352.

([8]) *J. reine angew. Math.*, t. 147, 1917, p. 36-53.

([9]) *Thèse* (en danois), Copenhague; *C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, p. 585-587; t. 149, 1909, p. 841-843; t. 155, 1912, p. 1485-1487; t. 156, 1913, p. 51-53; *Acta math.*, t. XXXIV, 1907, p. 1-108; t. XL, 1915, p. 191-249; *Mém. Acad. Copenhague*, 7e série, t. VI, 1911, n° 8; *J. Math. pures et appl.*, 6e série, t. IX, 1913, p. 77-88.

en considérant x comme une variable complexe. On peut résoudre complètement cette équation à l'aide d'une classe de transcendantes nouvelles qui ne sont pas sans intérêt. Remarquons d'abord que la série de puissances qui a rendu de grands services dans la théorie des équations différentielles se prête mal à l'étude des solutions des équations aux différences finies [1]. L'instrument analytique auquel il faut ici avoir recours, c'est la série de facultés; toute la théorie y gagne beaucoup en clarté et en beauté. La série de facultés [2] possède la propriété remarquable d'être capable de représenter une fonction dans un certain environ d'un point singulier essentiel de la catégorie qu'on rencontre ici. Elle permet d'indiquer l'allure de la fonction avec autant d'approximation qu'on le veut quand la variable tend vers le point singulier en restant dans le domaine de convergence de la série. Si les coefficients $p_i(x)$ sont des polynomes en x qui satisfont à certaines conditions, l'équation (2) admet un système fondamental de solutions $f_i(x)$ de la forme

$$(3) \qquad f_i(x) = a_i^x x^{\beta_i} \sum_{s=0}^{s=r} \varphi_s(x) (\log x)^s.$$

Les $\varphi_s(x)$ sont des fonctions qui se représentent par des séries de facultés convergentes de la forme

$$(4) \qquad \varphi_s(x) = A^{(s)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu^{(s)}}{x(x+\omega)\ldots(x+\nu\omega)},$$

ω étant un nombre positif convenablement choisi. Ces solutions sont des fonctions uniformes et méromorphes dans tout le plan. Soient α_ν les zéros de la fonction $p_0(x)$. Les solutions $f_i(x)$ admettent pour pôles les points α_ν, $\alpha_\nu - 1$, $\alpha_\nu - 2$, ... et elles sont d'ailleurs holomorphes. Les séries (4) convergent pourvu que la partie réelle de x soit positive et *plus grande* que les parties réelles des pôles α_ν. On voit immédiatement sur l'expression (3) comment se comportent les solutions $f_i(x)$ quand x tend vers

---

(1) En effet, les séries de puissances qu'on sait former divergent dans les cas qui doivent tout d'abord nous intéresser. Le calcul effectif de ces séries divergentes est d'ailleurs plus difficile que celui des séries de facultés convergentes.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914, p. 1252-1254 et 1325-1327; *Acta math.*, t. XXXVII, 1914, p. 327-387.

l'infini *en restant dans le demi-plan de convergence*. On a, en particulier,

$$(5) \qquad \lim_{|x|=\infty} \frac{f_i(x)}{a_i^x x^{\beta_i} (\log x)^r} = k_i.$$

k_i étant une constante finie et différente de zéro. Il y a un autre système fondamental de solutions méromorphes $\bar{f}_i(x)$ qui est encore de la forme (3), mais les $\varphi_s(x)$ se représentent, cette fois, par des séries de facultés de la forme

$$(6) \qquad \varphi_s(x) = B^{(s)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu^{(s)}}{(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-\nu\omega)}.$$

Soient γ_ν les zéros de la fonction $p_n(x+n)$. Les solutions $\bar{f}_i(x)$ admettent pour pôles les points γ_ν, $\gamma_\nu+1$, $\gamma_\nu+2$, ... et elles sont d'ailleurs holomorphes. Les séries (6) convergent, pourvu que la partie réelle de x soit *plus petite* que les parties réelles des pôles γ_ν. Quand x tend vers l'infini en restant à l'intérieur de ce demi-plan de convergence, on a encore une égalité de la forme

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\bar{f}_i(x)}{a_i^x x^{\beta_i} (\log x)^r} = \bar{k}_i.$$

Entre les deux systèmes de solutions, il existe des relations linéaires de la forme

$$f_i(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \pi_\nu(x) \bar{f}_\nu(x),$$

les $\pi_\nu(x)$ étant des fonctions périodiques de x et plus précisément des fonctions rationnelles de $e^{2\pi i x}$. En tenant compte de ce que nous venons de dire, on voit immédiatement, à l'aide de ces relations, comment se comportent nos solutions quand x tend vers l'infini le long d'un rayon vecteur quelconque. En exceptant certains arguments singuliers, on a toujours une égalité de la forme (5), mais les constantes a_i, β_i, etc. changent avec l'argument de x.

On peut étendre une partie des résultats précédents à des cas plus généraux. Par exemple, si les coefficients $p_i(x)$ de l'équation aux différences sont des fonctions qui admettent un développe-

ment en série de facultés, on peut encore démontrer [1] l'existence de solutions de la forme (3), holomorphes dans un demi-plan. Au voisinage de tout point singulier à distance finie, ces solutions se comportent comme une fonction rationnelle des $p_i(x)$, mais il arrive que les solutions n'admettent pas de prolongement dans tout le plan.

On peut, dans certains cas, intégrer une équation aux différences à l'aide d'une fraction continue [2] convergente dans tout le plan et l'on peut se servir des considérations qui précèdent pour déterminer les domaines de convergence d'une classe étendue de fractions continues.

En faisant des hypothèses très larges relativement aux coefficients $p_i(x)$, on peut démontrer [3] l'existence d'un système fondamental de solutions de la forme

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} R_\nu(x)\, E(x-\nu),$$

$E(x)$ étant une fonction entière convenablement choisie, les $R_\nu(x)$ étant des fonctions rationnelles des $p_i(x)$ déterminées par les relations

$$\begin{gathered} p_0(x)\,R_0(x) - 1 = 0, \\ p_0(x+1)\,R_1(x) + p_1(x)\,R_0(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_0(x+\nu)\,R_\nu(x) + p_1(x+\nu-1)\,R_{\nu-1}(x) + \dots + p_n(x+\nu-n)\,R_{\nu-n}(x) = 0. \end{gathered}$$

Ces développements convergent uniformément dans tout domaine fini qui ne renferme pas de point singulier de l'équation aux différences.

L'équation (2) a été étudiée par M. Galbrun [4] à l'aide de la transformation de Laplace dans le cas où les coefficients sont des polynomes qui satisfont à certaines conditions. Il a repris les

---

(1) *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XXXV, 1913, p. 177-216.

(2) *Voir* mon Mémoire dans les *Acta mathematica*, t. XXXIV, 1910, p. 1-108, et deux beaux Mémoires antérieurs de M. de Montessus : *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. XIX, 1905, p. 185-257 ; *Acta math.*, t. XXXII, 1909, p. 257-281.

(3) *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXXI, 1914, p. 205-221.

(4) *C. R. Acad. Sc.*, t. 148, 1909, p. 905-907 ; t. 149, 1909, p. 1046-1047 ; t. 150, 1910, p. 206-208 ; t. 151, 1910, p. 1114-1116 ; *Acta math.*, t. XXXVI, 1913, p. 1-68.

séries de puissances divergentes que M. Horn avait envisagées pour des valeurs réelles de x et, en donnant à x des valeurs complexes, il a démontré que ces séries représentent encore asymptotiquement les solutions dans certains angles.

M. Birkhoff [1] a étudié un système d'équations de la forme

$$(7) \qquad f_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) f_j(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

à coefficients rationnels. Soient n systèmes de solutions linéairement indépendantes,

$$\begin{matrix} f_{11}(x), & \ldots, & f_{n1}(x), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f_{1n}(x), & \ldots, & f_{nn}(x), \end{matrix}$$

et soit $F(x)$ la matrice formée de ces solutions. Les coefficients $p_{ij}(x)$ forment une seconde matrice $P(x)$. On peut écrire les n^2 équations auxquelles satisfont ces solutions sous la forme

$$F(x+1) = P(x) F(x).$$

Cette équation admet les deux solutions symboliques

$$\begin{aligned} F(x) &= P(x-1) \quad P(x-2) \quad P(x-3) \ldots, \\ F(x) &= P^{-1}(x) \quad P^{-1}(x+1) P^{-1}(x+2) \ldots, \end{aligned}$$

qui convergent vers des matrices limites dans certains cas particuliers.

Par une modification convenable de ces deux expressions, M. Birkhoff obtient, dans des cas étendus, deux systèmes de solutions, et il fait voir comment elles se comportent asymptotiquement et quelles sont les relations qu'il y a entre elles. L'ingénieuse méthode de M. Birkhoff est d'une grande généralité et s'applique dans presque tous les cas qui sont d'un réel intérêt. M. Birkhoff [2] a aussi consacré un beau Mémoire au problème de Riemann étendu aux équations aux différences finies.

Dans un Mémoire récent, M. Horn [3] a appliqué la transfor-

---

[1] *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XII, 1911, p. 243-284.

[2] *Loc. cit.* et *Proc. Amer. Acad. Arts and Science*, t. XLIX, 1913, p. 521-568.

[3] *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, t. XXIV, 1915, p. 210-225.

mation de Laplace au système (7). En supposant que les coefficients sont des fonctions holomorphes au voisinage du point à l'infini, il réduit ce système à un système d'équations intégrales linéaires du type de M. Volterra.

Nous devons citer aussi des travaux mémorables de MM. Mellin [1], Watson [2] et Carmichael [3]. Le dernier auteur a obtenu des résultats assez généraux à l'aide de la méthode des approximations successives.

Quoiqu'il y ait une certaine analogie formelle entre les équations différentielles et celles aux différences finies, les transcendantes que définissent ces deux catégories d'équations sont d'une nature bien différente. On le voit déjà à l'exemple le plus simple : la fonction gamma. M. Hölder [4] a démontré que cette fonction ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique.

M. Barnes [5] a étendu ce théorème et démontré qu'en général il en est de même pour la solution de l'équation

$$f(x+1) - p_1(x) f(x) = p_2(x),$$

les $p(x)$ étant des fonctions analytiques et uniformes.

15. Il y a encore une autre classe d'équations fonctionnelles, analogues à celles qui précèdent, mais où la substitution $(z, z+\omega)$ a été remplacée par la substitution (z, qz). Le cas le plus simple est celui d'une équation linéaire de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_i(x) f(xq^i) = 0. \tag{8}$$

---

(1) *Acta math.*, t. XV, 1891, p. 317-384; t. XXV, 1902, p. 139-164.

(2) *Quart. J. pure and appl. math.*, t. XLI, 1910, p. 10-20, p. 50-55; *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. VIII, 1910, p. 125-161.

(3) *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. XII, 1911, p. 99-134; t. XVII, 1916, p. 207-232; *Amer. J. Math.*, t. XXXVIII, 1916, p. 185-220.

(4) *Math. Ann.*, t. XXVIII, 1887, p. 1-13.

(5) *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. II, 1904, p. 280-292. *Voir* aussi sur ce sujet E.-H. Moore, *Math. Ann.*, t. XLVIII, 1897, p. 49-74; Tietze, *Monatsh. Math. Phys.*, t. XVI, 1905, p. 329-364; E. Stridsberg, *Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik* (Stockholm), t. VI, 1910, nos 15 et 18; T.-E. Mason, *Amer. J. Math.*, t. XXXVI, 1914, p. 419-440.

Le géomètre allemand Heine [1] s'est occupé d'une équation du second ordre et à coefficients linéaires. Il trouve comme solutions des fonctions méromorphes, analogues aux fonctions hypergéométriques et qui s'y réduisent quand q tend vers un. Thomae [2] a étudié ces fonctions du même point de vue que Riemann avait adopté dans ses recherches sur les fonctions hypergéométriques et il a étendu les résultats de Heine à des équations d'ordre quelconque. Dans cet ordre d'idées, il faut rappeler aussi des travaux plus récents de MM. Birkhoff, F.-H. Jackson, Rogers van Vleck, Watson, Ashton et E.-R. Smith. A l'aide d'un développement en fraction continue, M. Pringsheim [3] a fait voir que la série de Heine, qui converge dans le cercle $|x| < 1$, représente une fonction uniforme et méromorphe dans tout le plan. Le cas général d'une équation de la forme (8), à coefficients analytiques, a été étudié par M. Carmichael [4]. Cet auteur considère aussi des systèmes d'équations fonctionnelles de cette forme. En supposant $|q| \neq 1$, il démontre l'existence de deux systèmes de solutions dont l'une se comporte d'une manière simple au voisinage du point $x = 0$ pendant que l'autre se comporte d'une manière semblable au voisinage du point à l'infini, et il met en évidence quels sont les points singuliers des solutions. M. Mason [5] s'est occupé du cas où les coefficients $p_i(x)$ sont des fonctions entières, et il démontre l'existence de solutions de la forme

$$f(x) = x^{\alpha_i} F(x),$$

$F(x)$ étant une fonction entière de x, pendant que les α_i sont fonctions des racines d'une certaine équation algébrique.

Il y a une certaine fonction particulière qui joue un rôle capital dans la théorie des équations fonctionnelles de la forme (8) : c'est la fonction entière qui satisfait à l'équation

$$f(x) = f(xq)(1 - x).$$

---

(1) *J. reine angew. Math.*, t. 34, 1847, p. 285-328; *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, 2e édition, Berlin, 1878, p. 97-125.

(2) *J. reine angew. Math.*, t. 70, 1869, p. 258-281; *Ann. Mat. pura ed appl.*, 2e série, t. IV, 1870, p. 105-138.

(3) *Sitzungsb. Akad. München*, t. XL, 1910, p. 26-35; t. XLI, 1911, p. 61-64.

(4) *Amer. J. Math.*, t. XXXIV, 1912, p. 147-168.

(5) *Amer. J. Math.*, t. XXXVII, 1915, p. 439-444.

En prenant cette fonction pour point de départ, M. Appell [1] a construit une classe de transcendantes qui dépendent d'un nombre quelconque de paramètres et qui lui ont permis de résoudre certaines classes d'équations de la forme

$$f(x+\omega)=f(x),$$
$$f(x+\omega_1)=\varphi(x)f(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée qui admet la période ω ; des cas particuliers de ces fonctions avaient été antérieurement considérés par M. Picard [2]. Il paraît probable qu'il y a encore des remarques intéressantes à faire au sujet de toutes ces transcendantes.

Certaines équations non linéaires du type précédent ont été envisagées par Poincaré. Il s'est proposé de rechercher quelles sont les fonctions qui admettent un théorème de multiplication et qui ne présentent pas, pour $x=0$, de point singulier essentiel. Soit un système d'équations de la forme

$$(9)\qquad f_i(xq)=R_i[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)] \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

les $R_i(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ étant des fonctions rationnelles des m lettres $f_1, f_2, \ldots, f_m$ et à *coefficients constants*. Si certaines conditions sont satisfaites, Poincaré [3] démontre l'existence d'un système de solutions $f_i(x)$ qui sont des transcendantes uniformes et méromorphes dans tout le plan et holomorphes au voisinage du point $x=0$. Il arrive par là à des fonctions uniformes qui demeurent inaltérées par une substitution Cremona et ses puissances. Les équations (9) sont analogues aux équations (1) de M. Picard, mais les cas considérés par ces deux savants sont, en réalité, différents. Mentionnons encore que M. Picard [4] a considéré des fonctions d'un nombre quelconque de variables admettant un théorème de multiplication, et a indiqué des généralisations des fonctions abéliennes.

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 86, 1878, p. 953-956; t. 89, 1879, p. 841-844, p. 1031-1032; *Math. Ann.*, t. XIX, 1882, p. 84-102.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 86, 11 mars 1878.

(3) *J. Math. pures et appl.*, 4e série, t. VI, 1890, p. 313-365.

(4) *C. R. Acad. Sc.*, t. 139, 1904, p. 5-9; *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, Paris, 1906, p. 463-465; *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 30, 1913, p. 247-253.

On voit que les problèmes du calcul aux différences finies déjà envisagés sont très vastes. Mais on n'a fait que le premier pas. Les conditions très variées qui peuvent déterminer les solutions des équations aux différences appellent encore de nombreuses recherches. Ces théories prennent une importance toujours croissante depuis le moment où l'on a dû se demander si les lois du mouvement pourront encore être exprimées par des équations différentielles ou si la discontinuité va régner sur l'univers physique.

SUR QUELQUES POINTS D'HYDRODYNAMIQUE;

PAR M. H. VERGNE.

I. — DÉBUT DE L'ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE PAR UN ORIFICE EN MINCE PAROI.

1. Dans une séance du 9 janvier 1920 du « Séminaire mathématique » présidée par M. Hadamard, M. P. Langevin a posé le problème d'hydrodynamique suivant :

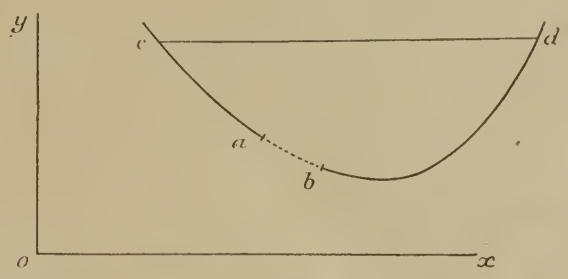
Un liquide parfait pesant incompressible est en équilibre dans un vase fixe; la pression y suit partout la loi hydrostatique. On découvre brusquement un orifice dans la paroi du vase; la pression sur cet orifice prend aussitôt la valeur de la pression atmosphérique, et la dépression se fait sentir instantanément dans toute la masse fluide. On demande de déterminer la répartition initiale des pressions ou, ce qui revient au même; la distribution initiale des accélérations des particules liquides.

M. J. Hadamard a bien voulu m'inviter à étudier cette question, et c'est à elle qu'est consacré le début de cette Note, qui reproduit ce que j'ai dit à la séance du « Séminaire » du 16 février 1920 (¹).

(¹) Dans un Mémoire *Sull' inizio del effuso dei liquidi*, publié, en 1916, dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (t. 41, p. 207), M. Signo-

2. Pour avoir une discussion analytique plus facile, nous nous limiterons, dès le début, au cas du mouvement plan à deux dimensions, le vase qui contient le liquide ayant la forme d'un cylindre indéfini à génératrices horizontales, dont la section droite sera prise pour plan de la figure (*fig.* 1); l'orifice sera la portion du

Fig. 1.



cylindre comprise entre deux génératrices projetées en a et b. Nous prenons pour axes de coordonnées Ox et Oy une horizon-

---

rini avait pensé pouvoir déterminer la répartition initiale des *vitesses* prises par les particules liquides, par suite de la brusque ouverture de l'orifice. Il s'appuyait sur une affirmation de M. Levi-Civita (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 157, 1913, p. 481), attribuant à la valeur absolue de la vitesse, prise instantanément par une particule située à l'orifice brusquement ouvert, la valeur de Torricelli $\sqrt{2gh}$ (h désignant sa profondeur). Il s'agissait alors de déterminer la vitesse initiale dans toute la masse, connaissant sa valeur absolue à l'orifice, sachant qu'en tout point de la paroi, elle est tangente à cette paroi, et qu'en tout point de la surface libre, elle est verticale. L'auteur résout ce problème, dans le cas de deux dimensions, au moyen d'une représentation conforme appropriée.

Malheureusement, c'est un lapsus évident que d'attribuer une valeur différente de zéro aux vitesses initiales instantanées, en particulier la valeur $\sqrt{2gh}$ à l'orifice. En effet, d'où proviendrait l'énergie cinétique acquise instantanément par le liquide, puisque aucune dépense corrélative d'énergie ne lui correspondrait? Les *vitesses* initiales sont donc assurément toutes nulles, et l'on ne peut parler que d'*accélérations* initiales.

Le calcul, d'ailleurs parfaitement correct et élégant, de M. Signorini résout bien le problème analytique qu'il s'était posé, mais ce problème analytique n'a aucun rapport avec la question physique du début de l'écoulement d'un liquide par la brusque ouverture d'un orifice.

C'est à la suite d'une discussion détaillée du Mémoire de M. Signorini, faite au « Séminaire », que M. Langevin a été amené à redresser l'énoncé du problème et à le poser sous la forme donnée dans le texte, en substituant la recherche des accélérations initiales à celle des vitesses initiales.

tale et une verticale ascendante, dans le plan de la figure. Il est clair que tout ce qui se passera dans le plan de la figure se passera aussi dans les plans parallèles, et que les phénomènes, à un instant quelconque, ne dépendront que des deux coordonnées x et y [1].

Nous supposerons la densité ρ du liquide égale à l'unité, pour simplifier les écritures, et nous désignerons, suivant l'usage, par p la pression, par u et v les composantes de la vitesse d'une particule de coordonnées x et y, par u' et v' les composantes de son accélération :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Les équations générales de l'hydrodynamique rationnelle (équations d'Euler) s'écrivent

$$u' = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$v' = -\frac{\partial p}{\partial y} - g.$$

Elles nous montrent qu'à tout instant l'accélération (u', v') dérive du « potentiel » $\pi = p + gy$ (qui représente la cote piézométrique)

Il revient donc au même de déterminer la distribution initiale des accélérations, ou de déterminer en fonction d'x et d'y la valeur initiale de $(p + gy)$, c'est-à-dire la répartition initiale des pressions.

Or, lorsque à l'instant initial, on découvre brusquement l'orifice ab, on y fait régner instantanément la pression atmosphérique; d'ailleurs, la pression atmosphérique ne cesse pas de régner sur la surface libre cd. D'autre part, l'accélération initiale le long de la paroi est évidemment tangente à cette paroi et, par suite, la dérivée normale du potentiel $\frac{d(p+gy)}{dn}$ est nulle. Nous connaissons donc, à l'instant initial, la valeur de la fonction $\pi = (p + gy)$

---

[1] Les résultats obtenus dans le cas de deux dimensions nous renseigneront *qualitativement* sur le cas plus général du problème à trois dimensions.

sur certaines parties du contour qui limite le fluide, et la valeur de sa dérivée normale sur le reste du contour.

En outre, il est facile de voir que la valeur *initiale* de $(p+gy)$ est une fonction *harmonique :* cela résulte de ce que, *les valeurs initiales de u et v étant nulles*, les valeurs initiales de u' et v' satisfont à l'équation

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0,$$

qui résulte immédiatement de la condition d'incompressibilité, et qui entraîne, d'après les équations d'Euler,

$$\frac{\partial^2(p+gy)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(p+gy)}{\partial y^2}=0.$$

3. Ainsi, la détermination de la distribution initiale des pressions ou des accélérations, lors de l'ouverture brusque de l'orifice ab, se rattache, ainsi que l'a observé M. Langevin, à un problème de détermination d'une fonction harmonique π à l'intérieur d'un contour, avec conditions mixtes sur le contour [1].

C'est là, du reste, un problème analytique qui se rencontre dans beaucoup d'autres questions de Physique mathématique. La même fonction harmonique π représenterait, par exemple, la distribution stationnaire, soit du potentiel électrique, soit de la température, si le contour $cabd$ de la figure 1 limitait une plaque conductrice homogène dont les bords ca et bd seraient isolés, tandis que les bords cd et ab seraient portés à des potentiels ou températures connues.

4. Nous n'avons nullement pour but la recherche de la solution du problème général. Ayant ici en vue l'étude de l'écoulement d'un liquide pesant par un orifice brusquement ouvert, nous nous contenterons de mettre en évidence, sur un cas particulier très simple dont la solution est immédiate, le caractère général essentiel du *début* du phénomène, qui est le suivant : *tout le débit initial est fourni par les bords de l'orifice.*

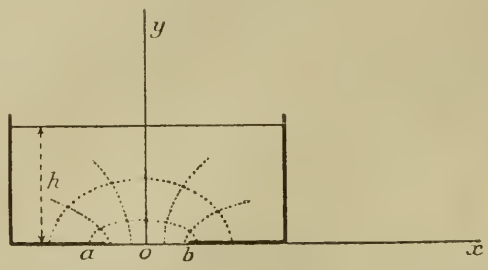
---

[1] C'est aussi un problème harmonique mixte que résout M. Signorini dans le Mémoire cité à la Note précédente; seulement, ce n'est pas le même.

Il est à remarquer que tout ce qui a été dit jusqu'ici subsiste intégralement dans le cas de trois dimensions.

Supposons donc que notre liquide, primitivement en repos, soit contenu dans un grand récipient à fond horizontal et de profondeur h. Nous prenons pour axe des x ce fond horizontal, en plaçant l'origine O au milieu de l'orifice ab (de largeur $2c$) que nous découvrirons tout à l'heure (*fig.* 2). L'orifice ab est supposé très

Fig. 2.



petit par rapport aux dimensions du vase et à la profondeur h. En d'autres termes, si nous regardons la largeur $2c$ comme une quantité finie, les dimensions du vase et sa profondeur h seront regardées comme infiniment grandes.

Dans ces conditions, lorsque nous ouvrons l'orifice ab, nous y faisons régner instantanément la pression atmosphérique, que nous pouvons toujours supposer nulle (puisque la pression n'intervient dans les équations de l'hydrodynamique que par ses dérivées); la valeur initiale de la fonction $\pi = p + gy$, sur l'orifice ab est donc zéro. D'ailleurs, les particules fluides situées *loin* de l'orifice ne prennent pas de vitesses, et la pression, loin de l'origine, continue donc à suivre la loi hydrostatique après comme avant l'ouverture de l'orifice : la fonction $\pi = p + gy$ prend donc, aux grandes distances, la valeur constante (et très grande) gh qu'elle a à la surface libre. Enfin, la dérivée normale $\frac{d\pi}{dn}$ est nulle au fond du vase, puisque l'accélération est tangente au fond.

(*A suivre.*)

1er Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Opere di Evangelista TORRICELLI, *edite in occasione del* III *centenario della nascita, col concorso del* Comune di Faenza, *da* Gino Loria *e* Giuseppe Vassura [Œuvres d'Evangelista Torricelli, publiées à l'occasion du troisième centenaire de sa naissance, avec le concours de la Ville de Faenza, par Gino Loria et Giuseppe Vassura]. In-8°. Faenza, Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, Amministrato dall' Orfanotrofio Maschi, 1919.

Volume I : Geometria; pubblicato per cura di Gino Loria [Géométrie; publié par les soins de Gino Loria] :

Parte I, con il ritratto di E. Torricelli e 373 figure [Partie I, avec le portrait de E. Torricelli et 373 figures], xxviii (*Introduzione* di G. Loria) + 407 pages.

Parte II, con 567 figure e 2 tavole litografate [Partie II, avec 567 figures et deux tables lithographiées], 482 pages (les pages 441-482 contiennent la reproduction de la célèbre lettre de Carlo Dati).

Volume II : Lezioni accademiche. Meccanica. Scritti vari; con 250 figure e 4 tavole litografate, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura [Leçons académiques. Mécanique. Écrits divers;..., publié par les soins de Giuseppe Vassura], 320 pages.

Volume III : Racconto d'alcuni problemi. Carteggio scientifico; con 260 figure ed alcuni facsimile di autografi, pubblicato per cura di Giuseppe Vassura [Exposition de quelques problèmes. Correspondance scientifique;..., et quelques fac-similés d'autographes, publié par les soins de Giuseppe Vassura], 521 pages.

L'édition actuelle répond aux vœux que Torricelli exprima lui-même en mourant, le 14 octobre 1647, lorsqu'il confia le soin de la publication de ses papiers inédits à son ami Ludovico Serenai. Mais diverses circonstances empêchaient la réalisation de ce dessein, qui ne fut pas davantage exécuté par Viviani, qui arrangea les papiers. Ce ne fut que pendant le xviiie siècle que quelques-unes des œuvres inédites de Torricelli furent publiées. Et même après que Nelli eut repris l'idée d'une édition complète, il ne parut qu'un choix de la correspondance publié par les soins de Ghinassi (1864)

et Boncompagni (1875), tandis que Caverni inséra, dans les six volumes de son *Histoire de la méthode expérimentale en Italie* (1891-1900), plusieurs précieux extraits des écrits de Torricelli, qui remplissent aujourd'hui les volumes XXI-XLIV de la célèbre collection des *Discepoli di Galileo*, à la Bibliothèque nationale, à Florence (1). Enfin, depuis l'année 1903, le projet d'une édition complète fut remis sur le tapis; en vue du troisième centenaire de la naissance du grand disciple de Galilée, le 15 octobre 1608, la commune de Faenza, sa patrie, se décida à réaliser le vœu séculaire, surtout sur les instances de M. Vassura, à qui le soin de l'édition fut confié.

En quatre ans, ce savant composa les volumes II et III de l'édition actuelle; ils sont imprimés depuis 1911, mais ils ne furent pas alors mis à la disposition des savants. M. Vassura ayant quitté l'Italie en 1912, M. Gino Loria, à Gênes, a bien voulu se charger de l'édition des écrits restés encore inédits.

Non longtemps après le commencement du XVIIe siècle, les géomètres s'étaient livrés à une étude approfondie des œuvres d'Archimède qui, en déterminant les quadratures de la parabole et spirale et la cubature des conoïdes et sphéroïdes, avait trouvé la valeur des intégrales $\int x\,dx$ et $\int x^2\,dx$, qui représentent la solution dans notre procédé actuel; il y avait ajouté celle de $\int \sin x\,dx$, déduite de la sommation des sinus d'arc en progression arithmétique et retrouvée par Kepler. En France, Fermat donna la valeur de $\int x^n dx$ en déterminant la quadrature des paraboles de degré supérieur, dont on lui doit le concept : il était suivi par Roberval et Descartes, et Mersenne avait même publié en 1639 les résultats que le dernier avait obtenu à l'égard des tangentes, quadratures et centres de gravité de ces courbes, avec la cubature et centres de gravité de leurs corps de révolution autour de l'axe. L'évaluation de la quadrature des trois sortes de roulettes ou cycloïdes de droite et de la cubature du volume engendré par la révolution de la cycloïde ordinaire autour

(1) On trouve l'énumération des manuscrits de Torricelli, tels qu'ils sont conservés à Florence chez Ghinassi, *Lettere fin qui inedite di Ev. Torricelli* (Faenza, 1864) p. XXXIII-XLVII.

de sa base, par Roberval, montre la valeur de la méthode dont ce géomètre disposait. Celle-ci trouvait une digne émule dans la géométrie des indivisibles établie en Italie par Cavalieri, qui résolut la question classique de la composition du contenu en regardant toutes les surfaces comme remplies d'une infinité de lignes parallèles et tous les solides de surfaces parallèles, en établissant cette proposition fondamentale que les différentes surfaces sont en même raison l'une de l'autre que toutes les lignes contenues dans chacune d'elles, et que les différents solides sont en même raison l'un de l'autre que les superficies qui y sont contenues. Pour la détermination de ces sommes, Cavalieri se servait d'un théorème, démontré déjà en France en général, qui lui donna les valeurs de $\int x^3 dx$ et lui fit soupçonner celle de $\int x^4 dx$. Au lieu de se livrer à ces calculs, on pouvait remarquer aussi le rapport d'un problème nouveau, par exemple de quadrature, à des quadratures déjà évaluées, comme nous le réduisons à des intégrales connues. Ainsi Cavalieri lui-même avait réduit, depuis 1621, la quadrature de la spirale d'Archimède à une parabole, égalisation démontrée par Fermat pour les deux sortes de courbes de degré supérieur. Enfin, s'il était impossible d'expliquer les quantités recherchées algébriquement par les quantités données, on devait se contenter de ramener la quadrature à celle du cercle (en langage moderne, à des intégrales exprimables au moyen de π ou de fonctions circulaires) ou à celle de l'hyperbole (fonctions logarithmiques).

C'est du féconde procédé de Cavalieri que Torricelli s'empara de la manière la plus heureuse. Déjà pendant son séjour à Rome, où il étudiait avec ses amis Michel-Angelo Ricci et Borelli sous la direction de Castelli, et constituait avec Magiotti et Nardi le célèbre triumvirat dont parle Galilée, il acquit la connaissance de quelques problèmes traités par les géomètres français, par l'intermédiaire du P. Nicéron, qui fit de fréquents voyages entre cette ville et Paris. C'était par celui-ci aussi que fut remis à Cavalieri, de la part de Beaugrand, la proposition de trois problèmes, dont l'un était le fameux problème de la quadrature de la cycloïde ; à son tour le géomètre de Bologne le remit, en 1640, à Galilée et à son mécène Ciampoli, à Fabriano, dont Torricelli était alors le secrétaire

(t. III, p. 44), ce qu'il fut jusqu'à son retour à Rome en mars 1641. Comme l'inventeur même du calcul des indivisibles, Torricelli échoua à la solution. Mais il donna déjà des preuves de son génie en déterminant la cubature du fuseau parabolique, trouvée par une autre méthode, en France, par Fermat, et en Italie par Cavalieri et Rocca, qui l'avait réduite à la quadrature de l'hyperbole au moyen du théorème de Pappus-Guldin avant même que la solution de Beaugrand arrivât à Cavalieri dans l'été de 1641. C'est de cette époque aussi que date la solution par Torricelli d'un problème de propre invention : celui de la cubature du corps infini connu comme le *solidum acutum hyperbolicum;* l'équation de l'hyperbole étant $xy = a^2$, il trouva, par la décomposition du corps en des tubes cylindriques autour de l'axe, la valeur finie $2\pi a^2 x$, résultat de l'intégration $\int_0^x 2\pi xy\,dx$ (t. III, p. 65, 66).

Les études de Torricelli se poursuivaient heureusement après son départ pour Florence en octobre 1641, où il secourut la vieillesse de Galilée, dont il fut nommé le successeur en février 1642, à l'âge de 34 ans.

Un des problèmes qui l'occupaient alors le plus souvent est celui de la détermination des centres de gravité des figures géométriques, poussée avant au plus haut degré, au moyen de la méthode des limites, par Luca Valerio et della Faille. Torricelli perfectionna cette méthode, en déterminant par exemple le centre du secteur du cercle *more veterum* (t. I, P. 2, p. 57-69). D'ailleurs, il se servait de la nouvelle méthode des indivisibles, recommandée aussi par Beaugrand dans son dernier envoi à Cavalieri. Mais, tandis que celui-ci et Rocca réduisaient le théorème des moments à des intégrations, Torricelli rendit ce procédé encore plus facile en ce qu'il ne multipliait pas le poids des éléments infinis par la distance au point d'appui, mais savait concentrer ces poids mêmes sur l'étendue de la droite qu'il appelle la *libra*. Son procédé résulte de nombreuses déterminations contenues dans un traité exprès que nous apporte la nouvelle édition (t. I, P. 2, p. 175-226). Nous en relevons un théorème, trouvé au commencement de 1643, qui évaluait le centre de gravité d'un segment de sphère et, par quelque changement, celui de disques et segments d'ellipsoïde (t. I, P. 1, p. 210-211; t. III, p. 10, 70, 108, 111, 127); un autre,

énoncé à la fin de 1642, donna, au moyen du cône inscrit, non seulement le centre de gravité des volumes engendrés par la révolution d'une section conique quelconque autour de son axe, mais aussi les volumes eux-mêmes, donnant ainsi en même temps tout le contenu de l'Ouvrage de Valerio, et, comme le disait Cavalieri, le compendium de la géométrie de celui-ci (t. III, p. 11-12, 67, 88, 102-103, 127).

Il est important de remarquer que le second Volume de l'Ouvrage de Guldin sur les centres de gravité, qui contenait ses attaques contre le calcul de Cavalieri, n'arriva à celui-ci qu'au commencement de 1643; c'est alors que le savant Jésuate apprit à Torricelli la règle de Pappus-Guldin, qui aide à évaluer les cubatures des corps de révolution, le centre de gravité et la quadrature de la courbe génératrice étant connues, mais qui n'était pas démontrée par le Jésuite de Vienne (t. III, p. 93-97).

Quant aux quadratures, l'édition actuelle nous fait voir que Torricelli pouvait enfin envoyer, peu de temps avant le 23 avril 1643, à Cavalieri, la quadrature de la cycloïde (t. III, p. 122), retrouvée aussi par Ricci et Nardi, qui inventaient des sortes nouvelles de cette courbe (t. III, p. 323). Aujourd'hui nous ne connaissons pas moins de cinq manières de solution du problème par Torricelli (t. I, P. I, p. 164-169; P. 2, p. 325-328, 331-334). L'énoncé étant envoyé à Paris, par l'intermédiaire de Nicéron, au mois de juin 1643, avec toute une série de propositions, dont celle du *solidum acutum hyperbolicum* était la plus remarquable, il fut l'origine de la correspondance de Torricelli avec les géomètres français. Une communication incomplète de Roberval en 1643 (t. III, p. 134) conduisit Torricelli à l'étude de la quadrature des paraboles infinies, devenue possible par l'étendue du théorème de Cavalieri au cas général, à savoir que la somme de toutes les puissances d'ordre n d'une quantité continuellement croissante est à la somme d'autant de puissances égales à la plus haute comme 1 à $n+1$ ou $\lim \frac{1^n + 2^n + \ldots a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$, théorème employé aussi par les géomètres français et envoyé par Beaugrand à Cavalieri avant que Torricelli en donnât aussi une démonstration générale (t. III, p. 29-30, 374). Mis en rapport avec la règle de Cavalieri citée plus haut, ou un lemme intégral de Torricelli qui permettait la

transition de quantités différentielles à des quantités finies (t. I, P. 1, p. 132; t. III, p. 370, 484), il fournit à Torricelli la matière de la plus grande partie d'un traité spécial qu'il consacra à ces courbes et que nous offre l'édition actuelle (t. I, P. 2, p. 275-328).

L'auteur y traite aussi des centres de gravité et des tangentes à ces courbes ainsi que des cubatures et centres de leurs conoïdes; une relation plus exacte sur les travaux de Fermat étant envoyée en Italie par Carcavy au commencement de 1645 (t. III, p. 271-272, 279), Torricelli évalua ensuite l'intégrale $\int_a^b x^n\,dx$ pour quelques valeurs fractionnaires de n, à savoir pour les paraboles $y^2 = ax^n$ et $y^3 = ax^n$ (n entier) (t. I, P. 2, p. 277-287). Il consacra un second traité aux spirales infinies, définies mécaniquement (t. I, P. 2, p. 351-399; t. III, p. 280), et un troisième aux hyperboles infinies $x^p y^q = c$ (t. I, P. 2, p. 227-274), traitées aussi par Fermat vers la même époque, et dont Torricelli déduisait la quadrature (à l'exception de l'hyperbole ordinaire) par un seul théorème (t. I, P. 2, p. 233, 238, 241; t. III, p. 24-26, 272, 372-374, 375, 450). Depuis l'année 1645, Torricelli donna divers renseignements sur ses démonstrations à l'égard de ces trois sortes de courbes à Ricci (t. III, p. 225, 261, 277, 288), à Cavalieri (p. 372-374) et aux géomètres français (t. I, P. 2, p. 328; t. III, p. 18-19, 377-378, 386-389).

Outre les cubatures déjà mentionnées, Torricelli en trouva encore bien d'autres, faisant une digne suite aux travaux d'Archimède et à ses propres recherches publiées en 1644, par un traité publié pour la première fois dans notre édition (t. I, P. 2, p. 99-173); la première partie, intitulée *de solidis vasiformis* et adressée à Magiotti, contient, comme suite à la cubature du *solidum acutum hyperbolicum*, celle de divers corps formés ou excavés par la révolution de sections coniques, tandis qu'un appendice à tout le traité contient la cubature des anneaux, proposée à l'égard de cercles à Roberval (t. III, p. 15), qui a étudié le sujet dans son Traité des indivisibles; c'était de ces derniers corps que Torricelli donnait aussi la quadrature (t. I, P. 2, p. 437; t. III, p. 15). Il a aussi étendu ses recherches sur le *solidum acutum hyperbolicum* aux volumes formés par les hyperboles infinies (t. III, p. 449-450). Toutes ces cubatures n'exigeaient qu'une seule intégration, et

Torricelli les trouvait pour la plus grande partie par le procédé de Cavalieri, qui lui était la *via vere Regia* (t. I, P. 2, p. 140) et *un miracolo di scienza* (t. II, p. 20). Mais ayant recueilli une série de paradoxes auxquels ce procédé donnait lieu (t. I, P. 2, p. 20-28, 45-48) et se souvenant des attaques de Guldin et Bettini, répétées plus tard par Tacquet, il avait parfois soin d'ajouter à sa démonstration une autre démonstration d'après la méthode des Anciens. Dans un cas fameux, il prit encore un autre chemin. Après avoir évalué le centre de gravité de la cycloïde (t. I, P. 2, p. 218-222), il trouva par la règle de Pappus-Guldin le volume engendré par la révolution de la courbe autour de sa base (*Ibid.*, p. 225-226), volume que Roberval avait trouvé avant lui par une autre méthode. Torricelli en envoya l'énoncé à Paris, le 1er mai 1644 (t. III, p. 175, 177), avec d'autres propriétés de la courbe, telle une cubature prétendue du volume engendré par la révolution de la cycloïde autour de son axe, trouvée par la même règle. Mais immédiatement soupçonnée fausse par Roberval, qui, ignorant alors la règle de Pappus-Guldin, trouva la valeur exacte d'une autre manière, en 1645 (t. III, p. 338), les débats sur cette question (t. III, p. 350-351) refroidirent les relations entre les deux géomètres, qui avaient ici tort tous les deux.

On sait que Torricelli s'occupait aussi du problème de la rectification d'une courbe, plus nouveau que les précédents, et qu'on lui doit la rectification de la spirale logarithmique. Cette courbe était déjà étudiée avant lui. Elle se déduit aisément de la courbe gauche introduite par Nunez et relevée par Snellius, qui lui donna le nom de *loxodromie* et publia, en 1624, les premières vues à sa rectification. En posant l'œil dans le pôle opposé à celui vers lequel s'approche la loxodromie, elle se projette sur le plan de l'équateur comme une spirale logarithmique, qui coupe les demi-droites, qui sont les projections stéréographiques des méridiens, sous des angles égaux. On retrouve la même courbe en cherchant le plan qui doit couper sous des angles égaux les lignes de gravité supposées concourantes, à savoir le plan qui est également pressé par le poids. Ainsi la courbe (premier exemple du problème inverse des tangentes de Debeaune) fut étudiée par Mersenne dans son *Harmonie universelle de* 1636 (Lib. II, prop. 9, p. 119-121) et dans la préface de l'édition abrégée en latin (*Harmonicorum libri* XII) de la même

année. Le Minime ne laissa pas de faire mettre en lumière l'identité de cette courbe avec la projection de la loxodromie et de relever « qu'un poids se mouveroit perpétuellement par ce plan également incliné sans pouvoir jamais arriver au centre de la terre, autour duquel le plan torneroit toujours sans y arriver », opinion contredite à tort par Descartes, dans ses lettres de 1637 et 1638, qui trouva alors aussi la rectification de la courbe, exprimée par son équation $s = a\rho$. Comme M. Loria l'avait démontré déjà ailleurs, les titres de Torricelli à la découverte se fondent sur la circonstance que la rectification n'est pas donnée directement par les définitions dont part Torricelli (t. I, P. 2, p. 361, 362-363) et dont la première donne la courbe (qu'il appelle *spiralis geometrica*) par l'équation différentielle $\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho}{k}$. Outre la rectification, communiquée à Ricci et par celui-ci à Mersenne, le 17 janvier 1645 (t. III, p. 257), Torricelli trouva aussi la quadrature de la courbe (t. I, P. 2, p. 351 et suiv.), mais il gardait les chemins pris, sous les choses les plus secrètes, et ne les proposait qu'en juillet 1646 (t. III, p. 391) à Roberval, qui ne tardait pas à lui faire part (t. III, p. 497-498) des observations de Mersenne. Ajoutons que le géomètre de Florence résolut encore une autre proposition de Debeaune, à savoir : trouver la courbe dont la sous-tangente est constante ; proposition réduite déjà par Descartes à une équation différentielle [1]. De cette courbe $y = b \log \frac{x}{a}$, qu'il appelle *hemhyperbola logarithmica*, Torricelli traita la quadrature et des questions de cubature, en parlant dans ses lettres à Cavalieri et à Ricci, à partir de l'été de 1647, de son traité complet sur le sujet, qu'on retrouve aussi dans notre édition (t. I, P. 2, p. 229, 335 et suiv).

L'édition actuelle des *Œuvres de Torricelli*, est, comme le dit M. Loria, complète mais pas totale [2]. En tout cas, le nombre des

---

[1] Voir *Bulletin*, 2e série, t. XLII, 1918, p. 166, la note 3.

[2] Nous regrettons de n'avoir pas pu retrouver dans l'édition actuelle un écrit adressé par Torricelli à Ricci et dans lequel il a traité de la loi d'attraction, sujet en vogue au XVIIe siècle depuis les études de Kepler. Beaugrand, dans ses entretiens avec Galilée, Cavalieri et Castelli en 1635 et dans sa publication de 1636, avait supposé le poids d'un corps variant proportionnellement à la distance de son centre de gravité au centre de la Terre. Fermat, Descartes et Roberval s'étaient occupés du même sujet. Torricelli suppose le poids variant en

sujets traités dans les deux parties de ce premier volume est assez abondant, et nous nous joignons à M. Loria, quand il exprime le désir qu'on établisse un résumé des résultats auxquels Torricelli est arrivé, comme on l'a fait pour ceux obtenus par Grégoire de Saint-Vincent et Barrow. Mais, d'ailleurs, nous exprimons ici notre regret d'être privés dès à présent d'un index qui puisse servir de guide dans ce labyrinthe d'énoncés, guide d'autant plus nécessaire que souvent l'ordre des matières est défectueux dans les manuscrits, dont beaucoup sont des copies ou paraphrases de Serenai ou Viviani. M. Loria s'en est tenu exactement à cet ordre avec raison ; mais la défectuosité de cet ordre est souvent cause que des sujets sont traités ou répétés à des endroits où on ne les cherche pas en premier lieu. En complimentant le savant distingué pour l'accomplissement de son travail, nous espérons voir bientôt l'exécution de son désir et du nôtre, sans doute empêchée jusqu'à présent par les incommodités de l'époque.

Outre les *Lezioni accademiche*, comprenant onze lectures, dont les huit premières sont données à l'Académie, le Volume second contient, pour la plus grande partie, des sujets qui regardent la Mécanique, dans laquelle Torricelli se montre l'élève du grand Vieillard d'Arcetri. Celui-ci lui dictait encore, depuis la fin de 1641, la *Giornata quinta* pour ajouter aux *Discorsi* déjà publiés.

Une des nombreuses propositions que contient le traité de *Motu gravium naturaliter descendentium et projectorum* de Torricelli (p. 101-132), déjà imprimé en 1644, est le célèbre principe (p. 105) que deux corps sur des plans inclinés sont en équilibre quand le centre commun de gravité ne monte ni ne descend par un déplacement de ces corps. D'ailleurs, on y trouve énoncé (p. 112-124) la célèbre méthode mécanique pour la construction des tangentes à des courbes planes.

Cette méthode a été revendiquée pour Torricelli dans une pro-

---

raison inverse de la distance de son centre à celui de la Terre. Il est fait mention de son écrit par Grandi dans ses commentaires sur le traité du mouvement accéléré de Galilée et il en donne un extrait (*voir* les éditions des *Œuvres complètes de Galilée* à partir de 1718 jusqu'à celle d'Alberi (t. XIV, 1855, p. 120-121). L'écrit même de Torricelli se trouve aujourd'hui dans le volume XL des *Discepoli*, f° 112 et suivants.

fonde étude publiée en 1875 par Jacoli, dont M. Loria semble partager l'opinion. Mais en refusant la première découverte à Roberval lorsqu'il détermina, vers 1634, la forme de la cycloïde, il nous semble qu'on se fonde sur de fausses interprétations, en particulier des lettres de Descartes. D'ailleurs, tandis que le géomètre de Paris pouvait déclarer, dans sa lettre à Fermat d'août 1640, avoir construit par cette méthode la tangente à toutes les courbes arrivées à sa connaissance, Torricelli ne fait sa première application que le 29 juin 1641, lorsqu'il adressa à Galilée une lettre (t. III, p. 55) accompagnée d'un écrit sur l'énigme de la 18e proposition du livre des *Spirales* d'Archimède, dont le texte répond sans doute à l'écrit qui nous est conservé dans l'édition présente au tome I, P. 2, p. 377 et suiv., où est donnée la construction de la tangente à la spirale. Son application à la cycloïde, déduite d'un théorème, qui avait pu faire voir à son auteur la courbe comme tautochrone (t. III, p. 106), ne date que d'une époque peu antérieure à la publication de l'Ouvrage imprimé. Quant à l'application de sa propre méthode, on sait que cet Ouvrage, tout comme les *Cogitata* de Mersenne, parus peu de temps avant, ne donne *in extenso* que l'application à la parabole, ne faisant qu'une allusion à l'application à la spirale et aux cycloïdes. Pour la fécondité de la méthode, qui a exercé une grande influence sur les concepts de la variation continue de deux grandeurs et la formation du quotient différentiel, il faut consulter, au sujet de Torricelli, l'édition actuelle qui nous apporte la construction de la tangente au cercle (t. I, P. 2, p. 234-35), à l'hyperbole (*Ibid.*, p. 235-36), aux hyperboles infinies (*Ibid.*, p. 257-58, 307-309), aux paraboles infinies (*Ibid.*, p. 309-314; t. III, p. 376) et ellipses infinies, courbes dont s'occupait surtout Ricci, qui nous en a laissé tout un Ouvrage.

La méthode de la composition des mouvements avait d'autres applications encore. On a vu Torricelli rectifier la spirale logarithmique. Cependant cette rectification, comme celle des trois sortes de cycloïdes de droite faite par Roberval, probablement plus tôt, mais réduite à des arcs d'ellipse, regardait des courbes transcendantes. De telles rectifications ne réussissent pas à détruire l'opinion commune qu'il soit impossible de trouver un arc de courbe égal à une ligne droite, puisqu'on limitait cette opinion à des

courbes algébriques. En effet, à Paris, Hobbes et Roberval avaient trouvé, depuis 1643, par cette composition, l'égalisation de la spirale d'Archimède et de la parabole ordinaire à l'égard de la rectification; Torricelli aborda le même problème lors du séjour de Mersenne à Rome, au commencement de 1645 (t. III, p. 368). Le problème demeurait puisqu'on n'avait pas encore réussi à expliquer la longueur de l'arc parabolique par une quadrature, ce qui n'arriva que plus tard à Fermat, Auzout et Huygens, qui la réduisaient à celle de l'hyperbole ou des fonctions logarithmiques. Toutefois, à l'exemple des géomètres français, qui étudiaient de plus la rectification des spirales de cône (t. III, p. 496-497), Torricelli étendit le problème de l'égalisation à toutes les spirales et paraboles infinies (t. I, P. 2, p. 387 et suiv.).

On sait que la publication de Torricelli contenait aussi (t. II, p. 193) la loi de l'écoulement des eaux, d'ailleurs déjà soupçonnée avant lui [1]. A ces études fut donnée une suite naturelle par le traité inédit *de Motu ac momentis varia* (p. 233-250) qui se termine par la détermination de la forme que doit avoir un vaisseau rempli d'eau pour que l'écoulement se fasse également, problème qu'on retrouve dans la correspondance de Torricelli avec Mersenne, en 1645, et ailleurs (t. II, P. 2, p. 87-88; t. III, p. 246, 249-250, 264-265, 270, 277, 278), et dont l'énoncé torricellien, redressé par Mariotte, fut cru longtemps perdu. Des deux traités hydrauliques qui suivent, le premier (inédit) contient une étude sur les corps flottants et le problème de la couronne du roi Hiéron, qui était proposé à l'auteur par Castelli (p. 251-262). Nous passons sous silence le second, publié auparavant, et un traité inédit, mais inachevé, de la perspective pratique (p. 311-320) qui termine le volume, où l'auteur se montre digne de l'anagramme : *En vivescit Galilæus alter.*

---

[1] Déjà en 1614 Beeckman, plus tard l'ami de Descartes, conclut et nota en langue du pays que « si l'on veut faire passer par un trou, pendant un même intervalle de temps, une double quantité de l'eau, il faut faire la hauteur quatre fois plus grande ». Mersenne, qui visita ce Flamand en 1630, et s'entretenait avec lui par lettres, arriva à la même conclusion et la communiqua en 1639 à Descartes (*Œuvres*, éd. Adam et Tannery, t. II, p. 504) qui en développa en février 1643 la théorie (*Ibid.*, t. III, p. 617-630). Voir aussi les *Cogitata* du Minime de 1644 (*Hydraulico-pneumatica phenomena*, p. 49).

Comme le précédent, le troisième Volume de notre édition, qui comprend la correspondance, est publié par les soins de M. Vassura. Parmi les correspondants italiens de Torricelli on remarque : à Rome, Ricci (dont le Volume comprend 43 lettres adressées à son ami, et 26 de celui-ci au premier) et Magiotti (1 + 7); à Bologne, Cavalieri (35 + 15). Tandis que les envois que Fermat fit parvenir à Torricelli semblent perdus pour toujours, on trouve réimprimées dans ce Volume les lettres de Torricelli aux géomètres français : Mersenne (12), Roberval (3) et Carcavy (2), et en sens inverse (18 + 2 + 0). Le fameux *Racconto* de Torricelli, qui donne l'énumération des questions proposées et qui ouvre le Volume, peut être regardé comme une illustration de ces rapports, ainsi que toute la correspondance par rapport aux œuvres proprement dites de Torricelli, passées en revue plus haut.

Cette correspondance est cependant la seule source pour la connaissance de quelques travaux de physique que M. Loria compte parmi les principaux mérites de son héros. Passant ceux qui regardent la fameuse expérience du vide, auxquels nous espérons revenir ailleurs, il convient de remarquer ici quelque chose sur d'autres travaux, dont les résultats semblent avoir été appréciés par Torricelli beaucoup plus que ses idées sur la pression atmosphérique. Nous entendons ses méthodes pour la construction de lunettes et la polissure des objectifs à grande distance focale, dont Torricelli trouva la perfection dès la fin de 1643 ou au commencement de 1644 (t. III, p. 165).

A peu près tout ce que l'édition actuelle nous apporte sur ces méthodes consiste dans une lettre de Torricelli à Magiotti du 4 décembre 1643 (p. 150-154), déjà publiée par Ghinassi, et deux écrits qui s'intitulent *Monita circa usum telescopii* (p. 154-155) et *Condizioni richieste nei vetri* (p. 156), empruntés par M. Vassura à deux sources différentes. Remarquons cependant qu'en les regardant comme *post-scripta* à la lettre du 4 décembre 1643, l'éditeur a obéi à l'ordre des documents dans une de ces sources. Une date postérieure est rendue cependant probable par la circonstance que dans l'autre source, dressée par Ricci, les deux écrits sont séparés par une critique de Torricelli sur l'Ouvrage du P. Casrée (p. 155) qui ne parut qu'en 1645. En effet, la comparaison du texte de cette critique avec celui d'une lettre, imprimée

plus loin aux pages 326-327 de notre Volume, fait voir qu'il n'est qu'une paraphrase du dernier texte, pourvu par Ricci d'une en-tête nouvelle. Ceci est plus évident encore quand on le compare avec le texte de la lettre citée tel que nous le publions plus loin d'après une source qui le rend plus correct et plus complet. Ce document nouveau nous fait voir que les fameux *Monita* ne sont aussi qu'un extrait de la dernière lettre. A celle-ci M. Vassura attribue la date approximative de juin 1645, assez juste, mais pas encore la vraie. En effet, c'est de la lettre en question que Ricci parle dans la sienne du 2 avril 1645 (p. 310). Envoyée par son intermédiaire à Paris, cela lui donna l'occasion d'en faire des extraits, comme il le fit aussi pour les *Condizioni*, qu'il cite dans la même lettre comme destinées à Mersenne et communiquées par lui à Magiotti. Comme la lettre de Torricelli répond à celle de Mersenne du 15 mars 1645, et peut-être aussi à la partie de lettre reproduite à la page 278 de notre Volume, on constate donc qu'on peut fixer sa date à la seconde moitié de mars 1645, comme celle des *Monita* qu'elle contient et les *Condizioni* qui y étaient ajoutées.

De ce qui précède, il résulte plus encore. On sait que Torricelli n'a pas cessé de se montrer très jaloux de la renommée des verres de Fontana et des autres. En mourant il confia son secret, renfermé dans une cassette à clef, au Grand-Duc. Viviani nous raconte dans une Note, qui se trouve aujourd'hui au recto du folio 3 du recueil constituant le Volume 133 des *Discepoli*, comment le Grand-Duc le fit venir au palais à 4^{h} de la nuit du 8 décembre 1647 et lui confia ce trésor avec une allocution peu concise. Jamais cependant Viviani n'a pu profiter du secret ou le publier, et même Serenai ne le connaissait pas. Or, il apparaît que précisément les *Monita* et *Condizioni* ont fait partie du contenu de la fameuse cassette : Viviani les a copiés au recto et verso du folio 9, et au verso du folio 9 et recto du folio 10 du recueil cité. Si le Grand-Duc n'a pas cru ces documents de la plus haute valeur, Viviani au moins semble les avoir regardés comme un trésor précieux : il montre sa gratitude par l'annotation solennelle : *Ex munificentia Serenissimi Ferdinandi M. D.* Mais loin d'être de grands secrets, ce n'étaient que des conseils adressés autrefois au savant qui avait alors les relations les plus répandues.

La lettre de Torricelli à Magiotti du 4 décembre 1643 nous

présente le secret comme des conseils qui se réduisent à des instructions de technique : Torricelli n'aurait pas moulé les verres sur des formes de métal, mais de schiste, auxquelles ils étaient attachés par une mixture cryogène pour empêcher des changements de forme causés par l'augmentation de la température ([1]). De genre technique sont aussi les instructions contenues dans le manuscrit de Viviani, qui n'est pas cité par M. Vassura, mais qui en comprend encore d'autres que les trois déjà citées ([2]). Néanmoins on peut douter que le secret de Torricelli ait existé dans de telles instructions, si l'on se fonde sur d'autres renseignements. Lorsqu'il annonça à Magiotti et Ricci le 6 février 1644 la réception de la médaille envoyée de la part du Grand-Duc pour son invention, et qui lui est arrivée enfin « après beaucoup de discours et de vaines espérances », il présente son invention (p. 167) comme tirée des doctrines sur les sections coniques et sur la réfraction : de plus, vers la même époque, il tint des discours semblables. On serait donc incliné à la regarder comme s'appuyant sur des spéculations théoriques. En effet, la fabrication de verres hyperboliques est traitée plus d'une fois dans la correspondance avec Mersenne (t. III, p. 292, 303); il résulte de la fin de la lettre que nous publions, que Torricelli éprouvait les plus grandes difficultés dans la fabrication des verres hyperboliques concaves.

([1]) Dans une lettre inédite du 15 décembre 1647 à Serenai, Magiotti écrivit : *Quando il Sig. Torricelli mi scrisse l'invenzione, me la disse tanto in breve ch'io, sebbene l'ho provata, dubito che vi manchino molti particolari* (Mss. Gal., vol. XXII, f°. 2).

([2]) Folio 5 recto : *Occhiale di 4 vetri del Torricelli del Gran Duca lungo b* $1\frac{2}{3}$ (commencement : L'obiettivo unisce col foco al sole...; fin : con le tre lenti scopre mattoni 6).

Folios 6 recto-7 recto : L'occhiale fatto dal Torricelli del Gran-Duca è lungo b^a 10-con l'acuto-e l^a $11\frac{1}{7}$ con 4 lenti come 40 à 45....

Folio 12 recto : *Dopo un secondo scritto nel 1644 segue questo Modo di fare gli occhiale da vedere le cose piccole* (commencement : Si piglia del cristallo sottilissimo in fila...: fin : innamorato de'piu nobili studi del disegno, dell'architettura, e delle matematiche insieme).

Folio 14 recto : (Comm.) : Le centine o sono di vetro o di metallo...; fin : per ridurlo all' ultimo grado di pulitura e liscezza.

Folio 15 recto : (Comm.) : Supplicai S. A. a tener secreto con tutti il modo del Torricelli...: fin : se attacava le lamine su le centine.

A la lettre de Torricelli à Mersenne citée plus haut, M. Vassura n'avait pas attribué une date exacte. Déjà ailleurs [1] nous avons remarqué que la lettre autographe de Torricelli à Magiotti, que l'éditeur publie (p. 37) sous la date du 8 janvier 1640, est réellement du 8 janvier 1641. Nous regrettons de devoir signaler encore d'autres erreurs de cette sorte.

Quelques-unes de ces erreurs semblent ressortir de ce que l'éditeur n'a pas tenu compte du fait que diverses lettres sont datées d'après le style de l'Annonciation ou calcul florentin, qui commence l'année nouvelle par le 25 mars. Ainsi, la lettre reproduite à la page 67 et datée du 3 février 1642, doit être placée à sa date en 1643, ce qui est prouvé par le fait qu'elle contient des sujets qui n'apparaissent pas avant les pages 88 et 103 de notre Volume et par la mention du second Volume de l'Ouvrage de Guldin, dont Cavalieri, qui ne l'avait pas encore vu en décembre 1642 (87, 90), donna un résumé à Torricelli le 13 janvier 1643 (p. 93-96); c'est à cette lettre de la page 67 aussi que Torricelli fait allusion dans la sienne du 28 février 1643 (p. 108), dont il ressort que le destinataire, inconnu à M. Vassura, était le P. Michelini, sous la direction duquel le jeune Léopold de Médicis étudiait alors les mathématiques. De même, la lettre de Torricelli (en copie) du 7 mars 1642 est du 7 mars 1643 : on ne trouve pas la détermination du centre de gravité du secteur de cercle avant les pages 103, 105, 110, ni la règle pour la détermination de celui du segment sphérique avant les pages 108, 110, à savoir en février ou mars 1643. Les trois lettres datées, dans notre volume, respectivement du 2 janvier 1643 (p. 91-92), 16 janvier 1643 (p. 96-99) et 20 janvier 1643 (p. 99-100) ainsi que la lettre datée du 27 février 1643 (p. 106-107) sont toutes des mêmes dates de l'année 1644. Ceci est prouvé par le fait que les démonstrations de Ricci, qui sont mentionnées aux pages 96-97, dans la lettre du 16 janvier (dont la date de 1644 que portait l'original, est changée à tort par l'éditeur en 1643), sont rappelées aux pages 163 et 194-195 et que les cardinaux Cesarini et Raggi, dont la mort est mentionnée, sont décédés respectivement le 15 janvier 1644 et 31 décembre 1643; enfin le père Santini ne se fixait à Rome qu'au commencement

---

(1) *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, 1919, p. 33.

de 1644 (1). Ce dernier fait est décisif pour la date de la lettre du 2 janvier 1643 (p. 91), dont la vraie date (1644) concorde avec celle de l'épigramme signalé en note et qui se rapporte à la lettre citée de Ricci, de même que la lettre des pages 99-100 se rapporte aux deux lettres citées. Il en est de même pour la lettre des pages 106-107, où le P. Santini est signalé à Rome : cette lettre fameuse, qui contient la construction de la tangente à la cycloïde, doit être placée après le commencement de la correspondance de Torricelli avec les géomètres français; elle peut avoir des rapports avec des passages sur cette courbe dans deux lettres de Cavalieri de 1644 à la page 170, et dans la lettre du 1er mai 1644 (p. 175, 177).

Un rapprochement soigneux des dates est d'autant plus désirable qu'il s'agit d'une correspondance qui, comme celle de Torricelli, ne nous est conservée pour la plus grande partie qu'en copie. Probablement par la faute du copiste, la lettre de la page 218 porte à tort la date du 12 août 1644, tandis qu'elle est du 12 août 1645 et doit être placée par conséquent après celle de Cavalieri du 1er août 1645 (p. 330). Parfois aussi l'éditeur n'a pas été heureux dans l'arrangement des lettres aux copies desquelles il manque toute indication de date. Celle de Torricelli à Mersenne, aux pages 262-265 (date conjecturée fin janvier 1645), doit être regardée comme un appendice contemporain de la lettre imprimée aux pages 291-92; à celle-ci M. Vassura attribue la date de février 1645, mais les deux écrits réunis doivent être insérés plutôt au milieu de janvier 1645, comme répondant à la lettre de Mersenne du 25 décembre 1644, insérée à la page 245 (à rapprocher les passages p. 246, l. 23, et p. 249-250). La lettre des pages 343-344 (date supposée décembre 1645), dans laquelle l'ouvrage du P. Kircher est discuté, est postérieure à celle de la page 348 (16 décembre 1645) où l'on en annonce la publication prochaine (à comparer p. 401, 408) et peut-être contemporaine de la lettre du 16 juin 1646 (p. 379). Enfin la lettre des pages 346-347 (date conjecturée, décembre 1645), traitant du centre de percussion, est sans doute de l'année 1646 et postérieure à la lettre de Torricelli à Roberval du 7 juillet 1646 (à comparer p. 347, l. 31-34, et p. 385, l. 3-8).

---

(1) Comp. les pages 91, 99, 106, 180, 189, 195, 200, 214, 215, 220, 222, 224, 225, 227.

Dans son édition, M. Vassura a adopté apparemment le système de ne signaler dans les prolégomènes des lettres que les manuscrits les meilleurs et de reconstruire les leçons douteuses d'après ces manuscrits sans plus. Quand il ne s'agit pas d'autographes, mais seulement de copies, faites soit par Serenai, soit par Viviani, il valait parfois la peine de signaler aussi les autres copies et de donner les variantes. Nous empruntons deux exemples à des copies de la correspondance de Torricelli avec les géomètres français telle qu'elle existe à la Bibliothèque nationale, à Paris (¹). Quant à la lettre de Roberval à Torricelli, du 1er janvier 1646 (349), M. Vassura ne cite pour seule source qu'un codex manuscrit du XVIIe siècle se trouvant « chez lui », rendant ainsi le lecteur assez curieux; heureusement on l'a à la Bibliothèque nationale (fonds lat. 11196, fos 1 et suiv.), où d'ailleurs on en conserve même (f. lat. nouv. acq. 2341, f°. 1) la minute jusqu'au mot *superatur* (p. 352, l. 6) avec la mention *finis epistolæ* et la date du 1er novembre 1645, ce qui prouve que c'est la seconde partie seule de cette lettre qui date du 1er janvier 1646 et explique son annonce répétée de Mersenne à Torricelli (p. 345, 346, 357, 360). La longue lettre de Roberval à Torricelli, qui termine le volume, ne fut pas écrite entièrement dans l'année 1647, mais commencée dès l'automne de 1646. M. Vassura ne l'a publiée que d'après les imprimés de 1693 et de 1731, ou plutôt d'après la dernière édition seulement; mais par inadvertance il a tourné deux pages ensemble, de sorte qu'il nous manque à la page 490 de son édition (au milieu du mot barbare *suffocuborum*, l. 17 en montant) le précieux exposé de la méthode de Roberval pour la quadrature des spirales et paraboles de degré supérieur, qui touche de près au travail de Torricelli. La consultation des manuscrits de cette lettre (Bibl.

(¹) Une copie partielle de la lettre de Roberval à Mersenne (p. 133) de juin 1643, f. fr. nouv. acq. 3283, f° 106; la lettre de Torricelli à Roberval du 7 juillet 1646 (p. 381), f. lat 11196, f° 14 verso; de Torricelli à Mersenne de la même date (p. 399), f. lat. nouv. acq. 2338. fol. 8; de Torricelli à Carcavy du 8 juillet 1646 (p. 405) f. lat. 11196, f° 23 recto et verso. — Notons, quant à la dernière lettre traitant de la règle générale pour l'évaluation des centres de gravité, que la leçon mutilée des pages 406 (l. 3 en montant) et 407 (l. 1), aurait pu être redressée facilement par la comparaison des passages précédents : p. 366, 369, 371 (comp. aussi vol. I, P. 2. p. 218).

nat. fonds lat. 11196, f°s. 29 recto-41 et fonds lat. nouv. acq. 2341, f° 3 recto et suiv.) aurait pu faire éviter cette omission ([1]).

On pourrait faire aussi quelques remarques à l'égard de l'exécution typographique de l'édition de M. Vassura. La lecture serait rendue plus facile si, dans le texte des lettres, on avait mis en vedette les citations et si l'on avait mis en alinéa chaque fois qu'on passe à un sujet nouveau. Il est à regretter que M. Vassura ait souvent négligé de donner l'indication exacte de l'Ouvrage dont il est traité dans la lettre, ainsi que de déterminer par quelques éclaircissements la personnalité d'un auteur lorsqu'il y est insuffisamment indiqué ou de préciser les endroits de la correspondance auxquels l'épistolaire fait allusion, omissions d'autant plus regrettables puisqu'il nous manque aussi un index de la correspondance. Un système qui s'en tient à de tels renseignements, tel qu'il est adopté, par exemple, dans l'édition nationale des *Œuvres de Galilée*, n'aurait pas cependant exigé trop d'espace dans cette édition, qui n'a pas éprouvé, comme celle de M. Loria, les incommodités qui rendent l'impression aujourd'hui si difficile.

Mais, comme le disait le regretté Tannery, le second qui advient prend aisément l'avantage. Et d'ailleurs, il ne faut pas oublier que c'est à M. Vassura, soutenu par la générosité de la commune de Faenza, que le monde savant doit enfin l'exécution de l'édition des papiers du géomètre de Florence, qui ne peut pas souffrir la comparaison avec les grandes éditions de Fermat, Descartes, Galilée ou Huygens, mais qui représente encore, sous son état actuel, un précieux instrument de travail pour celui qui cultive l'histoire des sciences. Comme la vie de Torricelli fut brève, brève fut aussi la période de sa production intellectuelle et très brève celle pendant laquelle il montra au monde toute la puissance de son génie. Dans la dernière de ses *Lezioni accademiche* traitant *della Fama*, il défend l'opinion que la gloire est à apprécier seulement pendant la vie et n'a pas de valeur après la mort. Cette opinion est peut-être plutôt un exercice dialectique qu'une conviction intime. L'édition

---

([1]) Depuis l'impression du volume, M. Favaro, dans le *Boll. di bibl. e storia delle sc. mat.*, 1914, a encore publié une lettre de Torricelli et une seconde lettre adressée à Torricelli, empruntées aux volumes L et CXLVII des *Discepoli*. M. Loria signale la publication dans la note 73 de son Introduction.

actuelle permettra de reconnaître au grand disciple de Galilée la gloire à laquelle il a renoncé lui-même. Par ailleurs, elle inspire l'admiration pour le grand génie italien qui lui fut contemporain.

C. DE WAARD.

TORRICELLI A MERSENNE.

(Firenze, fin de mars 1645.)

[Vienne, Hofbibliothek, codex 7049 (recueil acquis en France vers 1720 par le comte de Hohendorf), lettre numérotée CXXVIII. — Copie. — Le document répond à une lettre de Mersenne du 15 mars 1645.]

Galileus ait spatia temporibus deinceps æqualibus peracta à gravibus ex quiete naturaliter descendentibus inter se esse ut numeri impares ab unitate incipientes. Hoc verum est non obstante quali-

Fig. 1.

bet obiectione. Miror reperiri aliquem cuius contradicendi cupido adeo procedat, ut Propositiones proferre non dubitet quæ etiam si veræ fuerint, falsæ omninò essent. Nonne inauditum absurdum est hoc, veritatem sibi ipsi repugnare, atque etiam si reperta sit veritas, modo veritas sit, non amplius veritatem esse, sed falsum?

In hüiusmodi syrtes incidit Autor ille ([1]) qui Galilei Propositionem negavit pronuntiavitque aliam, affirmans spatia gravium ex quiete cadentium temporibus deinceps æqualibus esse in ratione dupla.

Concedamus ([2]) in dupla ratione esse, fateor. Videamus iam quid consequitur. Ergo spatium primi temporis erit ut unum, secundi temporis ut 2, tertij temporis ut 4, quarti verò temporis ut 8. Nonne ita? Si verum hoc est, ratio non est dupla, nam primi simul et secundi temporis spatium erit 3, tertij verò simul et quarti temporis spatium erit 12. Falsum itaque est quod ait Autor ille, nam ego ex ipsius documento invenio rationem spatiorum temporibus æqualibus non duplam esse, sed quadruplam. Idem absurdum accidet semper quamcunque tandem rationem inveniat pronuntietque præter iam a Galileo prolatam.

Nec me movet experimentum trium experimentorum fallacissimum; neque enim aliud esse poterat ad falsam opinionem confirmandam.

Pro comperto ego habeo globum unius libræ, si in alteram lancem cadat ex qualibet altitudine etiam minimâ, non solum æqualem sibi globum, sed etiam centuplo maiorem ex opposita bilancis parte elevaturum esse. Bilanx verò non utcunque, sed eiusmodi esse debet ut ipsius fila nihil distrahantur neque brachia incurventur neque materia globi cadentis lancisve subiectæ contundatur; hæc enim singula effectum impediunt. Gravitas etiam lancium et brachiorum libræ experimentum fallacem reddere possunt, dum hæc singula impetum seu momentum cadentis globi minuere certum est. Quæ omnia, si penitus vitentur, sive quoad fieri poterit minuantur, procul dubio quilibet parvi globi casus in altera lancium ingens pondus ab altera parte elevabit, quamquam per spatium exiguum et fortasse insensibile.

Esto libra AB ([3]) cuius fulcrum in medio C, ex una parte pon-

---

([1]) Petri Casræi *e societate Iesu. Physica demonstrativa, qua ratio, mensura, modus atque potentia accelerationis motus in naturali descensu gravium determinatur, adversus nuper excogitatam a Gallilæo Gallilæi florentino philosopho ac mathematico de eodem motu pseudo-scientiam. Parisiis, apud Jacobum de Brevil* MDCXLV.

([2]) Comp. le passage reproduit dans les *Opere* cités, vol. III, p. 155, l. 21-31.

([3]) Nous supprimons la figure, qui est identique à celle reproduite dans la partie imprimée de la lettre (*Bull. di bibliogr e di storia delle sc. mat. e fis.*, t. VIII, 1875, et *Opere*, ed. cit., vol. III, p. 327).

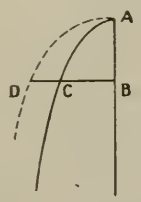
dus centum librarum, ex altera verò unius libræ tantum cadatque pondus minus ab altitudine decem diametrorum; quæritur an elevare possit pondus centum librarum? Hoc probari videtur ab hoc experimento. Clavum ferreum D tenaci ligno infixum, subiecimus lanci A quiescenti, visumque est pondus A non impellere ulterius clavum D. Globus verò ferreus unius libræ cadens ab altitudine decem diametrorum, impellebat eundem; nam repetitis sæpius ictibus, totus clavus in ligno fixus tandem est. Maius ergo momentum habet ictus minoris globi qui parum movet clavum D, quam gravitas maioris quæ nihil eundem clavum movet; propterea ictus minoris gravitatem maioris superare debet, quamquam si proportio gravium maxima fuerit et instrumentum fallat, spatium præ exiguitate oculis percipi nequeat.

Oro P. V. ne quis videat epistolam hanc; neque nempe pro responso hæc dicta volo, neque obiectio mihi digna videtur cui respondeam.

Ad parabolam biquadraticam describendam aliam methodum dabo qua eam perducere possimus ad datam quamcunque altitudinem. Cæterum non est cur eam descriptam a me exigat P. V., nam hæc requirunt summam diligentiam et perfectissima instrumenta solertissimosque artifices quales Lutetiæ passim sunt; ego vero apprime negligens sum circa huiusmodi descriptiones et picturas. Illud præmoneo huiusmodi experimenta non nisi in vasibus (1) magnæ capacitatis cum demonstratione concordatura esse ob figuram vasis quæ in parvo vix perfecta fieri poterit. Deinde credo ego frigus caloremque velocitatem aquæ exeuntis vel augere vel minuere posse ut constat ab alijs experimentis.

Modus describendæ parabolæ esto hic (2). Fiat circa axem AB

Fig. 2.



parabola vulgata AC. Deinde applicata qualibet BC. Sumatur BD.

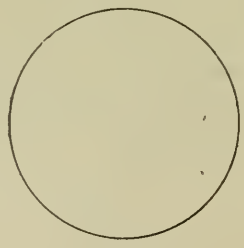
(1) Il s'agit des vaisseaux mentionnés ci-avant p. 235.
(2) Comp. le passage *Opere*, vol. III, p. 265, l. 13-21, et p. 277.

media proportionalis inter latus rectum factæ parabolæ et applicatam BC. Tunc enim parabola quæsita ibit per punctum D, et sic de singulis punctis.

De propositionibus geometricis quas mihi misit P. V. (1), gratias ago de omnibus quidem, quamquam ex illis aliquas iam noveram, ut videre est in demonstrationibus de Maximis et minimis quas misi Romam ad P. V. (2) et ad initium libelli mei *de Solidis sphæralibus* (3).

Quod ad vitra attinet si P. V. perfectius illud 4 brachiorum accipiat, enixe oro ut illud in Gallia ostendat quamplurimis promittatque me daturum et alia eiusdem maioris minorisve sive perfectionis sive longitudinis tubi. Hoc unum occuleres oportet : pretium; neque nempe quis minori quam triplo eiusmodi vitra abs me habebit; ab alijs vero nullo modo habere poterit. Illud (4) præcipue non est negligendum tubi fabbrica, ne in ipso usu inflectatur sitque maioris potius crassitiei quam ut radios intus convergentes intercipere possit. Debet etiam tribus aut quatuor internodijs sive diaphragmatis (qualia sunt in arundinibus) sed perforatis esse interseptus, ne lumen quoddam intra os tubi oblique receptum incidens in cavam tubi superficiem ad oculum ullo modo repercuti possit. Curandum insuper est quam partem vitri detectam, sive repertam relinquamus, quod experienti manifestum erit.

Fig. 3.



Vitrum illud de quo erat sermo, tantum fere, et fortasse plus

(1) Dans une lettre du 15 mars 1675 (*Opere*, vol. III, p. 303-304).

(2) Dans la première moitié du mois de janvier 1675 (comp. *Opere*, vol. III, p. 262-264, 291-292 et ci-avant, p. 240).

(3) *Opere*, vol. I, P. 1, p. 6-9.

(4) A l'exception de quelques passages qu'il contient de plus, le texte suivant consiste dans les *Monita*, dont il a été question plus haut.

foraminis feret quantus est circulus hic descriptus. Ad res vero minutas aspiciendas minori circulo utendum est.

Cæterum quamquam vitra perfectissima sint, perraro admodum bonitatem suam ostendere possunt ob aeris temperiem. Vel nempe nebula quædam, sive caligo sive fumus tenuissimus in aere est quarum rerum atomos non secus ac reliqua obiecta auget et visibilia reddit telescopium. Præterea aer sæpissime tremit et quoda(m) modo scintillat (credo equidem ob vapores ascendentes) non tantum æstate et sub ardenti sole, sed et hieme etiam, et sæpe flante Borea, imo et de nocte quod lunam contemplanti patebit. Tunc enim ambitus eius tremit maculæque minutiores malignè cernuntur. Malignius autem tunc temporis figura Saturni conspicitur quæ proxime ellapsis diebus talis erat : ; satellites nempe sunt oblongi cum duabus illis maculis nigris utrinque, partemque illorum Saturnus ipse occulit obiectu sui globi qui perfectæ rotunditatis apparet ([1]). Perfectissima visio fit ut plurimum matutino et vespertino tempore, averso semper sole, nubilo etiam cœlo (quod inverisimile est) et post pluviam clarissimus per tubum conspectus est, dum(m) odo species obiectorum non ferantur supra frequentissima urbium loca. Vis enim ingens vaporum quæ de fumariis emittitur, species omnes visibiles perturbat.

Plura monere poteram. Pauca hæc sufficiant quæ non nisi longo usu observari solent; multi nempe perfectionem vitrorum accu-

---

([1]) Comme l'opinion des contemporains sur les lunettes de Galilée, celle sur les télescopes de Torricelli est aussi assez différente. En général Mersenne s'en plaignait et son opinion semble confirmée par l'histoire de Torricelli et Novelli, rapportée par Targioni Tozzetti. *Notizie degli aggrandimenti delle sc. fis. accaduti in Toscana*, t. I, 1780, p. 178-79. Torricelli lui-même ne les jugeait pas inférieures à celles de Novelli et d'autres (*Opere*, t. III, p. 448) et Divini croyait qu'on ne pouvait pas surpasser deux objectifs de Torricelli, qui lui étaient remis de la part du Grand-Duc (Targioni Tozzetti, *l. c.*, p. 247-248). Selon Huygens, les lunettes de Torricelli n'avaient pas eu la longueur suffisante, « car comment » dit-il « seroit-il possible que Torricelli ayant de si excellents télescopes n'auroit pas découvert les figures de Saturne et son Satellite? » (*Œuvres*, t. VI, 1895, p. 209). On regrette que rien ne nous soit connu de cette carte lunaire, dessinée par Torricelli et entrée aussi en possession du Grand-Duc, dont parle Burattini dans une lettre à Hevelius (Favaro, *Intorno alla vita ed ai lavori di Tito Livio Burattini*, 1896, p. 79). Toutefois, les mérites de Torricelli envers l'Astronomie semblent médiocres.

sant cum ijs contrario tempore utantur ipsique potius accusandi sint.

De problemate armonico (1) habeo opinionem quandam neque demonstratam neque excultam, sive accurate examinatam. Hinc est quod illam adhuc non scripsi cùm indignam iudicarem (quod a) tanto Viro legeretur.

Tractatulus meus *de Motu aquarum* (2) absolutus iam a me est. Non dico quia perfectus sit, sed quia in animo mihi est circa ipsum nihil amplius laborare.

Tractatus quos P. V. offert libentissime, viderem remitteremque quocunque iusserit; tam istos circa refractiones et fabbricam telescopij perfecti, quam etiam editos illos à Domino Cartesio. Quod ad figuras attinet, non nego hyperbolicas, ellipticas aliasque similes difficiliores esse quam sit ipsa sphærica. Sed tamen sunt possibiles in vitris convexis; in concavis vero

hoc opus, hic labor est (3).

Annum iam absumpsi frustra; quod si quando mihi liceat et concava ad libitum conformare, tunc fortasse manifestius apparebit inventi mei fructus.

---

(1) Voir la lettre de Mersenne à Torricelli de février 1645 (t. III, p. 294), la réponse de Torricelli (p. 296), celle de Mersenne du 15 mars 1645 (p. 303) et du 28 avril 1645 (p. 317).

(2) Suite sans doute au traité homonyme que Torricelli avait publié en 1644 (t. II, p. 185 et suiv.) et dont il ne nous reste que quelques fragments (t. II, p. 248-249; t. I, P. 2, p. 30). Peut-être Viviani s'est-il servi du traité de Torricelli lorsqu'il dressa les théorèmes hydrodynamiques, qui se trouvent aujourd'hui dans les Volumes CXVI et CXVII des *Discepoli*. Voir d'ailleurs sur le traité de Torricelli la réponse de Mersenne à la présente lettre du 28 avril 1645 (t. III, p. 317).

(3) Verg., *Aeneis*, VI, 129 ou Ovid., *Ars amatoria*, I, 453.

MÉLANGES.

SUR QUELQUES POINTS D'HYDRODYNAMIQUE

(*suite*);

PAR M. H. VERGNE.

La valeur initiale de π, potentiel des accélérations, est donc, au point de vue analytique, une fonction harmonique, déterminée dans le demi-plan supérieur, égale à zéro sur le segment ab (de largeur $2c$) croissant indéfiniment lorsqu'on s'éloigne à l'infini, et ayant sa dérivée normale nulle sur l'axe des x (en dehors du segment ab).

Une telle fonction harmonique est bien connue en Physique mathématique; on sait qu'en posant $z = x + iy$, elle est représentée par la partie réelle de l'intégrale

$$\int \frac{i\,dz}{\sqrt{c^2 - z^2}}.$$

Les courbes $\pi = \text{const.}$ sont des ellipses homofocales ayant les points a et b pour foyers; leurs trajectoires orthogonales, qui sont les hyperboles homofocales de mêmes foyers, représentent ce qu'on peut appeler les « lignes d'accélération », c'est-à-dire les courbes auxquelles sont tangentes les accélérations initiales. Il est bien connu encore qu'un tel potentiel π donne pour le vecteur (u', v'), qui en dérive, des valeurs partout finies, sauf aux bords a et b eux-mêmes; en tous les points de l'orifice on aura donc une accélération initiale verticale dirigée vers le bas, et *cette accélération deviendra infiniment grande aux bords* [1].

---

[1] Dans un problème classique d'hydrodynamique rationnelle, la même fonction π sert de potentiel, non plus pour les accélérations, mais pour les vitesses. Ce problème (purement théorique et ne répondant pas aux conditions réelles) est celui de l'écoulement permanent continu, et *sans jet*, d'un liquide à travers un orifice percé dans une mince paroi plane indéfinie. On a alors une

Par suite, au bout d'un temps très court, dt, les seules particules liquides qui auront acquis une vitesse finie seront celles situées contre les bords a et b. C'est bien dire que tout le débit initial est fourni par les *bords* de l'orifice. On voit à quel point le début du mouvement diffère de l'écoulement par jet en régime permanent.

5. Cette propriété des bords, évidente dans l'exemple extrêmement simple, dont nous venons de parler, paraît générale et semble s'appliquer à tout orifice *percé en mince paroi :* une dépression brusque à l'orifice produit un débit instantané, fourni exclusivement par les bords.

Ce phénomène permet, sans doute, de donner une explication, au moins partielle, de la production des anneaux de fumée qui, dans une expérience classique de lord Kelvin et Tait, sortent d'une boîte en carton remplie de fumée, et percée d'un trou rond en mince paroi, lorsqu'on donne un coup sec sur le fond de la boîte. Car une dépression brusque à l'orifice, ou une surpression brusque au loin, doivent donner les mêmes apparences (puisque, en hydrodynamique, la pression n'est jamais déterminée qu'à une constante additive près). Or, le coup frappé sur le fond de la boîte y produit une surpression instantanée, qui cesse presque aussitôt produite : la pression à l'orifice reste constamment égale à la pression atmosphérique extérieure. On doit donc voir sortir un *anneau* de fumée, ayant la forme des bords du trou ; et la discontinuité de vitesse qui existe à la partie extérieure de l'anneau est en accord avec la production d'un tourbillon dans le sens que l'on observe.

Assurément, la fumée n'est pas assimilable à un liquide incompressible. Mais la comparaison est, sans aucun doute, légitime. D'ailleurs, les expériences d'anneaux-tourbillons réussissent aussi bien avec des liquides : en prenant une boîte en fer-blanc un peu flexible, percée d'un trou *en mince paroi*, la remplissant de vin, la plongeant ensuite dans une grande cuve d'eau et comprimant

---

vitesse infinie aux bords de l'orifice, ce qui correspond à une pression *infinie négative*. Nous n'avons pas, ici, cet inconvénient : ce qui est infini au bord est, non pas la vitesse, mais l'accélération initiale, et la pression n'y est pas infinie négative, puisqu'elle est donnée et égale à la pression atmosphérique.

brusquement avec la main les parois de la boîte [1], on en fait sortir une petite masse de vin qui prend la forme d'un anneau-tourbillon excessivement net. On constate facilement ainsi les mouvements de translation connus de tels anneaux-tourbillons, leur élargissement quand ils arrivent près de la paroi de la cuve, et aussi la manière dont ils se comportent quand ils approchent de la surface libre de l'eau : si l'incidence est presque « rasante », ils se réfléchissent pour ainsi dire, en paraissant rebondir sur la surface libre; si l'incidence est presque normale, ils sortent hors du liquide, produisant un jet de vin [2].

Pour que les phénomènes soient nets, il est tout à fait nécessaire que l'orifice soit percé *en mince paroi;* ils perdent toute netteté si l'écoulement se produit par un *ajutage*, même assez court : et en effet, dans ce dernier cas, la théorie ne prévoit pas que les accélérations initiales seront infinies aux bords de l'orifice : elles seront finies partout; l'écoulement de la petite masse de vin dans l'eau se fera par tout l'orifice, ne produisant pas un anneau.

II. — Phénomènes d'éclaboussement.

6. Nous allons, à présent, étudier un ordre de phénomènes un peu différent, mais où nous arriverons à des résultats du même genre, par des considérations analogues : ce sont les phénomènes d'éclaboussement qui vont nous occuper. Ce qui caractérise ces phénomènes, ce sont surtout les vitesses verticales ascendantes *très grandes* que prennent les particules liquides qui éclaboussent. Lorsqu'on laisse tomber dans l'eau un petit corps solide pesant, même de très bas, il y a des gouttes d'eau qui rejaillissent très haut; on constate la même chose si, au lieu d'un petit corps solide, on laisse tomber dans l'eau un petit corps liquide, par exemple une goutte de vin : il y a rejaillissement d'*eau* en fines gouttelettes, souvent plus haut que la hauteur dont est tombée la goutte de vin.

---

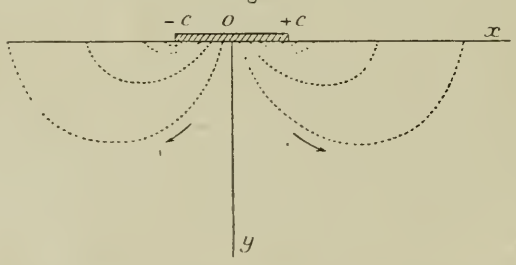
(1) Cette compression brusque (de même que le coup sec frappé sur la boîte à fumée) produit ce que nous appellerons tout à l'heure une « percussion de pression », c'est-à-dire une pression très grande agissant pendant un temps très court et engendrant des vitesses instantanées finies, origine de l'énergie cinétique de l'anneau-tourbillon.

(2) Voir plus loin, n° 16.

Nous commencerons par examiner un cas particulier simple : Laissons tomber une pièce de monnaie *à plat* à la surface de l'eau, d'une hauteur h ; elle y arrive avec la vitesse $V = \sqrt{2gh}$ et vient choquer la surface libre : il y a « percussion » et sa vitesse immédiatement après le choc n'est plus que v_0 (nous verrons tout à l'heure comment on la détermine). Le problème qui se pose est celui de la détermination de la distribution *initiale* des vitesses prises instantanément par les particules liquides par suite de la percussion qu'elles reçoivent.

Pour simplifier, nous nous bornerons, encore ici, au problème à deux dimensions, en supposant que ce qui se passe dans le plan vertical de la figure se passe identiquement dans tous les plans parallèles ; cela correspond au cas où on laisse tomber à plat à la surface de l'eau une pièce rectangulaire très allongée (par exemple un madrier). Nous supposerons que l'eau s'étend indéfiniment en

Fig. 3.



largeur et en profondeur. Nous prendrons l'axe des x sur la surface libre du liquide, l'axe des y vertical vers le bas, et l'origine O au milieu de la largeur $2c$ de la pièce qui tombe à plat (*fig.* 3).

7. *Percussion de pression.* — La pièce qui tombe à la surface de l'eau voit sa vitesse varier brusquement de V à v_0 : elle subit donc une percussion, c'est-à-dire une force très grande pendant un temps très court τ ; c'est dire que pendant l'instant τ du choc, les pressions sous la pièce et, par suite, à l'intérieur du liquide, acquièrent des valeurs très grandes $\left(\text{de l'ordre de } \frac{1}{\tau}\right)$. L'intégrale

$$P = \int_0^\tau p\,dt$$

étendue à la durée du choc aura alors, en chaque point, une valeur finie, que nous pouvons appeler *percussion de pression :* c'est une fonction bien déterminée d'x et d'y à la fin du choc.

Nous allons reconnaître de suite que cette fonction $P(x, y)$ va servir de potentiel pour les vitesses initiales. En effet, écrivons les équations d'Euler (où la densité ρ est supposée égale à l'unité)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -u',$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g - v';$$

multiplions-les respectivement par dt et intégrons pendant l'instant τ du choc, en remarquant que $\int_0^\tau g\,dt$ est négligeable (g étant fini) et que

$$\int_0^\tau u'\,dt = u, \qquad \int_0^\tau v'\,dt = v$$

représentent les composantes de la vitesse initiale. Nous obtenons

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -u,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -v.$$

La condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 = \Delta P$$

nous apprend, en outre, que ce potentiel des vitesses P est une fonction harmonique déterminée dans tout le demi-plan inférieur.

Quant aux conditions aux limites que doit remplir la fonction P, elles sont les suivantes :

1° Sur l'axe des x : Pour $x < -c$ et $x > c$, la pression à la surface libre ne cesse pas d'être la pression atmosphérique, que nous pouvons toujours supposer nulle; on a donc $P = 0$. Pour $-c < x < c$, la composante verticale de la vitesse doit être v_0, vitesse de la pièce à la fin du choc; on a donc $\frac{\partial P}{\partial y} = -v_0$.

2° A l'infini, c'est-à-dire aux grandes distances de l'origine, les

vitesses initiales sont nulles; P se réduit donc à une constante, qui est forcément nulle, puisqu'elle l'est à la surface libre.

Nous sommes donc ramenés à un problème harmonique mixte.

8. Avant d'en donner la solution, faisons la remarque suivante. Nous avons jusqu'ici supposé le liquide complètement dépourvu de viscosité. Si maintenant nous le supposons légèrement visqueux, nous devrons, au lieu des équations d'Euler, écrire les équations de Navier

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -u' + \eta \Delta u,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g - v' + \eta \Delta v,$$

η désignant un petit coefficient tenant compte de la viscosité.

Or, si nous désignons toujours par

$$P = \int_0^\tau p\, dt$$

la percussion de pression, les équations de Navier multipliées par dt et intégrées pendant l'intant τ du choc, nous donneront encore

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -u,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -v,$$

comme quand il n'y avait aucune viscosité, car les intégrales

$$\int_0^\tau \eta \Delta u\, dt, \qquad \int_0^\tau \eta \Delta v\, dt$$

sont négligeables, puisqu'elles portent sur des quantités finies (sauf peut-être au contact même de la pièce de monnaie, s'il y a adhérence de la couche au contact, avec glissement rapide de la couche contiguë).

Nous pouvons donc dire que la viscosité du milieu fluide qui reçoit le choc ne change pas (ou change fort peu) la distribution des vitesses *initiales* à son intérieur.

9. *Détermination des vitesses initiales.* — Revenons au cas

du liquide sans viscosité, et déterminons-y maintenant la percussion de pression $P(x, y)$ à la fin du choc, ou — ce qui revient au même et sera un peu plus simple — la distribution des vitesses initiales u et v.

Si nous posons, suivant l'usage,

$$z = x - iy$$

et

$$W = v - iu,$$

il est clair que W sera une fonction *analytique* de la variable complexe z, déterminée et continue dans tout le demi-plan inférieur. Les conditions d'incompressibilité et d'irrotationnalité donnent, en effet,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Quant aux conditions aux limites que doit remplir W, elles sont les suivantes :

1° Sur l'axe des x : Pour $-c < x < c$, la partie réelle v de W doit être égale à v_0. Pour $x < -c$ et $x > c$, sa partie imaginaire u doit être nulle (puisque le potentiel P y est lui-même nul).

2° A l'infini, W doit s'annuler, comme les vitesses u et v.

Dans ces conditions, il est facile de voir qu'on a immédiatement la solution en prenant

$$W = v_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{z^2}}}\right),$$

qui satisfait, visiblement, à toutes les conditions [1].

---

[1] Cette même fonction analytique $W(z)$ intervient dans un autre problème bien connu d'hydrodynamique rationnelle. C'est, en effet, la fonction $-W + v_0$ qui, par sa partie réelle et sa partie imaginaire, donne la répartition *permanente* des vitesses, lorsqu'un courant liquide indéfini, de vitesse générale v_0, contourne un plan mince immobile de largeur $2c$, placé normalement à la vitesse v_0 (sans discontinuité au sens d'Helmholtz-Kirchhoff); c'est d'ailleurs là un problème purement théorique et ne répondant pas à la réalité, puisqu'alors le courant ne pousse pas le plan mince placé en travers; en outre, les vitesses infinies aux bords du plan entraînent une pression *infinie négative*. C'est un inconvénient que nous n'avons pas ici, dans le problème que nous étudions, puisque la pression à la surface libre est donnée, et constamment égale à la pression atmosphérique.

Cette fonction W, en y remplaçant z par $x+iy$, donnera, par sa partie réelle et sa partie imaginaire, les composantes v et u de la vitesse initiale en chaque point. Nous aurons donc la distribution initiale complète des vitesses, dès que nous aurons calculé v_0.

On peut tracer les « lignes de courant » initiales, tangentes en chaque point à la vitesse : elles ont la forme représentée en pointillé sur la figure 3. Toute particule de la surface libre (extérieurement à la pièce) a sa vitesse initiale verticale dirigée vers le haut, et cette vitesse devient *infinie* aux bords mêmes de la pièce ($z=\pm c$), expliquant, au moins en partie, le rejaillissement de gouttes d'eau à grande hauteur.

10. Si l'on veut enfin calculer la percussion de pression, il suffira de prendre l'intégrale

$$P=-\int u\,dx+v\,dy$$

à partir d'un point quelconque de la surface libre (ou de l'infini) où P est nul. Cette intégrale se calcule très aisément : elle n'est pas autre chose que la *partie réelle* de la suivante :

$$i\int_{\infty}^{z} W\,dz,$$

dont la valeur est immédiatement trouvée égale à

$$i\,v_0\left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right).$$

En particulier, à la surface et immédiatement sous la pièce (z réel et compris entre $-c$ et $+c$), la percussion de pression aura pour valeur, au point d'abscisse x,

$$P=v_0\sqrt{c^2-x^2},$$

valeur que nous utiliserons dans un instant.

Si l'on traçait, sur la figure 3, les lignes P = const., elles dessineraient les trajectoires orthogonales des lignes de courant tracées en pointillé.

(*A suivre.*)

1re Partie

MÉLANGES.

SUR QUELQUES POINTS D'HYDRODYNAMIQUE

(*suite et fin*);

PAR M. H. VERGNE.

11. *Détermination de* v_0. — Il nous reste à déterminer v_0 qui figure comme paramètre dans les calculs précédents. Nous allons écrire que la pièce de masse M voit sa quantité de mouvement varier brusquement de MV à Mv_0 sous l'action de la percussion $\mathfrak{P}$ qu'elle subit :

$$M(v_0 - V) = \mathfrak{P}. \tag{1}$$

Or cette percussion $\mathfrak{P}$, évidemment négative (dirigée vers le haut), est la somme des percussions de pression subies par la face inférieure de la pièce

$$\mathfrak{P} = -\int_{-c}^{+c} P\,dx = -\int_{-c}^{+c} v_0\sqrt{c^2 - x^2}\,dx = -\frac{\pi v_0 c^2}{2}.$$

Nous aurons donc, pour déterminer v_0, l'équation du premier degré

$$M(v_0 - V) = -\frac{\pi}{2} v_0 c^2. \tag{2}$$

Cette formule, remarquons-le, n'est pas *homogène;* cela tient à deux raisons : d'abord, M doit représenter, non pas la masse totale de la pièce, mais sa masse par unité de longueur perpendiculairement au plan de la figure 3. Ensuite, nous avons supposé égale à l'unité la densité ρ du liquide : or cette densité ρ doit figurer au second membre de la formule (2).

Si donc nous appelons ρ' la densité de la pièce qui tombe, et ε son épaisseur, sa masse M par unité de longueur sera $M = 2c\varepsilon\rho'$, nous rétablirons l'homogénéité de la formule (2) en l'écrivant

ainsi

$$2c\varepsilon\rho'(v_0 - V) = -\frac{\pi}{2}\rho v_0 c^2,$$

d'où

$$(3) \qquad v_0 = \frac{V}{1 + \frac{\pi}{4}\frac{c}{\varepsilon}\frac{\rho}{\rho'}}.$$

12. On arrive au même résultat en appliquant au système matériel formé par le liquide et la pièce qui tombe le théorème de Carnot relatif aux percussions : les liaisons introduites par le choc étant sans frottement (liquide parfait) et persistant après le choc, écrivons que la force vive perdue par le système est égale à la force vive due aux vitesses perdues : nous obtenons l'équation

$$M(V^2 - v_0^2) + \int dm[0 - (u^2 + v^2)] = M(V - v_0)^2 + \int dm\left(0 - \sqrt{u^2 + v^2}\right)^2,$$

qui se réduit à

$$(4) \qquad M v_0(V - v_0) = \int (u^2 + v^2)\, dm,$$

l'intégrale du second membre étant étendue à tous les éléments $dm = \rho\, dx\, dy$ de la masse liquide. Pour identifier cette équation (4) avec l'équation (1), il suffit de se rappeler que u et v dérivent du potentiel P qui est une fonction *harmonique* : l'intégrale double

$$\iint \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

étendue au domaine occupé par le liquide est donc égale à l'intégrale simple

$$(5) \qquad \int_C P \frac{dP}{dn}\, ds$$

étendue au contour C qui limite ce domaine : on peut, ici, prendre comme contour C, dans le plan de la figure 3, l'axe des x et une circonférence de rayon excessivement grand; la seule partie de ce contour qui donne un contingent non nul dans l'intégrale (5) est la portion de l'axe des x comprise entre $-c$ et $+c$; or, sur ce segment, la dérivée normale $\frac{dP}{dn}$ a la valeur constante v_0. Nous

avons donc finalement

$$\iint (u^2 + v^2)\, dx\, dy = v_0 \int_{-c}^{+c} \mathrm{P}\, dx = -v_0 \Omega,$$

ce qui rend l'équation (4) identique à l'équation (1). Le théorème de Carnot nous conduit donc bien, pour v_0, à la valeur (3); et cela prouve la légitimité de son application au cas actuel, légitimité dont on aurait pu douter, puisqu'on l'applique ici à un système déformable continu s'étendant à l'infini.

13. Nous allons étudier maintenant l'énergie cinétique initiale du liquide, c'est-à-dire la valeur de l'intégrale

$$\int (u^2 + v^2)\, dm$$

étendue à toute la masse liquide immédiatement après le choc.

La formule (4) nous donne, pour cette intégrale, les deux valeurs équivalentes

$$\mathrm{MV}^2 \frac{v_0}{\mathrm{V}}\left(1 - \frac{v_0}{\mathrm{V}}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{M}v_0^2\left(\frac{\mathrm{V}}{v_0} - 1\right).$$

Cela nous permet de comparer la force vive initiale du liquide à la force vive de la pièce MV^2 immédiatement avant le choc, et $\mathrm{M}v_0^2$ immédiatement après.

1° Nous voyons que la force vive initiale du liquide est une fraction $\left(\frac{\mathrm{V}}{v_0} - 1\right)$ de la force vive $\mathrm{M}v_0^2$ de la pièce après le choc. Or, d'après (3), on a

$$\frac{\mathrm{V}}{v_0} - 1 = \frac{\pi}{4}\,\frac{c}{\varepsilon}\,\frac{\rho}{\rho'};$$

cette fraction ne dépend pas de V, c'est-à-dire de la hauteur de chute de la pièce. En particulier, si $\frac{c}{\varepsilon}$ est très grand, c'est-à-dire si la pièce qui tombe sur l'eau est une plaque assez large et très peu épaisse, c'est le liquide qui possède presque toute l'énergie cinétique aussitôt après le choc; et cela, *quelle que soit la hauteur de chute*. Nous aurons une conclusion inverse si $\frac{c}{\varepsilon}$ est petit (cas d'une plaque tombant sur l'eau par sa tranche) : l'eau ne pos-

sédera alors, aussitôt après le choc, qu'une faible énergie cinétique, en comparaison de celle conservée par la pièce.

2° Si nous comparons maintenant la force vive initiale du liquide à la force vive MV^2 de la pièce avant le choc, nous voyons qu'elle en est une fraction

$$(6) \qquad \frac{c_0}{V}\left(1-\frac{c_0}{V}\right),$$

qui, d'après (3), ne dépend pas non plus de V, c'est-à-dire de la hauteur de chute. Prenons, par exemple, V constant et M constant; c'est-à-dire que nous ferons tomber toujours une même masse M d'une même hauteur h. Seulement, sans faire varier M, nous pouvons faire varier la section droite de la pièce qui tombe : car nous avons

$$M = 2c\varepsilon\rho'$$

et, la densité ρ' étant supposée invariable, nous ne changerons pas M en variant la largeur $2c$ de la plaque et son épaisseur ε, leur produit restant constant.

Dans ces conditions, cherchons à choisir c et ε, de façon que l'énergie cinétique du liquide soit la plus grande possible : il faut rendre maximum le coefficient (6); or ce coefficient est un produit de deux facteurs dont la somme est constante. Le maximum a donc lieu quand les deux facteurs sont égaux, ce qui donne

$$(7) \qquad c_0 = \frac{V}{2};$$

la pièce perd par le choc la moitié de sa vitesse. L'équation (4) nous apprend qu'alors la force vive du liquide $\int(u^2+v^2)\,dm$, et la force vive restante Mc_0^2 de la pièce sont égales; leur valeur commune est le quart de la force vive MV^2 de la pièce avant le choc.

La condition (7) s'écrit, d'après (3),

$$\frac{\pi}{4}\frac{c}{\varepsilon}\frac{\rho}{\rho'} = 1;$$

c'est la condition que doivent remplir c et ε pour rendre l'énergie cinétique du liquide maxima, c'est-à-dire pour que la masse fixe M

produise, en tombant d'une hauteur donnée, l'éclaboussement maximum.

Si, par exemple, la densité ρ' du solide et la densité ρ du liquide sont égales, on doit avoir

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{4}{\pi}.$$

C'est sans doute pour cette raison qu'un nageur qui pique un « plat-ventre » $\left(\frac{c}{\varepsilon}\right.$ un peu plus grand que $1\left.\right)$ éclabousse plus que quand il pique une tête $\left(\frac{c}{\varepsilon}\right.$ très petit$\left.\right)$: la condition (7) est probablement assez près d'être vérifiée [1].

14. Nous avons pu pousser les calculs jusqu'au bout, et déterminer complètement et très simplement la répartition initiale des vitesses à l'intérieur du liquide, par suite de la percussion due au solide qui tombe à sa surface, grâce à deux hypothèses restrictives : 1° nous avons réduit l'espace à deux dimensions; 2° nous avons supposé que la pièce solide vient heurter le liquide par une surface *finie* de largeur $2c$.

La première restriction avait seulement pour but une simplification *analytique*, et il n'est guère douteux que nos conclusions ne soient vraies, au moins qualitativement, quand on restitue à l'espace la dimension horizontale que nous avons omise, par exemple quand une pièce de monnaie tombe *à plat* dans l'eau.

La seconde restriction, au contraire, a un sens *physique* très net. Nous avons dit que c'est la percussion de pression qui communique instantanément aux particules liquides leurs vitesses initiales : ces vitesses deviennent infinies (ascendantes) aux bords ($x = \pm c$) de la surface de choc, produisant l'éclaboussement. Or, pour qu'il y ait percussion, il faut que la vitesse du solide qui tombe varie *brusquement* de V à v_0. C'est ce qui n'arrivera pas si le solide qui tombe dans l'eau a une surface convexe, par exemple s'il est sphérique : alors la vitesse du solide variera d'une façon continue et mettra un temps *fini* (d'ailleurs court) pour

---

[1] La condition (7), ainsi que la formule (4) de Carnot dont elle dérive, conserve la même forme pour le problème à trois dimensions, que pour le problème à deux dimensions traité dans le texte.

passer de sa valeur maxima $V = \sqrt{2gh}$ à une valeur ralentie v_0; de même, les particules fluides n'acquerront pas instantanément leurs vitesses, elles les prendront progressivement (d'ailleurs rapidement); et comme il n'y a plus de bords avec arête vive [1], ces vitesses *ne seront plus infinies* au voisinage du solide qui plonge, elles seront seulement très grandes, donnant un éclaboussement moins fort.

Nos conclusions ne subsisteront donc qu'à titre d'approximation, d'autant moins grossière que le corps qui tombe sera plus aplati : à masse égale, et tombant de la même hauteur, un ellipsoïde aplati à axe vertical éclaboussera plus qu'un ellipsoïde allongé : c'est le cas du nageur piquant un plat-ventre ou une tête.

On aura d'ailleurs toujours le droit de considérer un intervalle de temps assez court τ, pendant lequel la vitesse du solide variera de V à une certaine valeur v_0 (par suite des fortes pressions produites à sa partie inférieure), et d'appeler percussion de pression en un point quelconque l'intégrale

$$P = \int_0^\tau p\,dt$$

étendue à ce court instant. En tous les points du liquide qui sont un peu loin du solide, rien ne sera changé à ce que nous avons dit [2], c'est seulement au voisinage immédiat du solide que le mouvement sera troublé. En d'autres termes, si nous supposons que le solide qui tombe est un corps *très petit*, sa chute à la surface de l'eau produira les lignes de courant initiales dessinées sur la figure 3, sauf qu'on doit supposer infiniment petit l'intervalle $(-c, +c)$: ces lignes de courant forment alors le faisceau de circonférences tangentes à l'axe Oy et ayant leurs centres sur l'axe Ox [3]. On retrouve encore les vitesses verticales ascendantes

---

(1) Le rôle de l'arête vive du bord est, ici, entièrement analogue à celui que nous lui attribuions à la fin du n° 5, dans le début de l'écoulement par orifice en mince paroi.

(2) Sauf qu'on ne saura plus calculer v_0, qui, pour une même valeur de τ, sera naturellement plus faible pour un corps aplati que pour un corps allongé.

(3) La fonction $W = v + iu$ de la variable complexe $z = x + iy$ serait ici

$$W = \frac{C}{z^2},$$

C désignant une constante très petite négative.

très grandes des particules de la surface libre à droite et à gauche du point O (c'est d'ailleurs au voisinage immédiat du point O que notre analyse ne s'applique plus).

15. De l'analyse qui précède, on peut (avec une certaine imagination) rapprocher plusieurs faits bien connus, outre l'éclaboussement ordinaire par un corps tombant verticalement dans l'eau.

Lorsqu'un obus tombe à la surface de l'eau, même *obliquement*, et qu'il y percute, on sait qu'il produit l'ascension d'une haute colonne d'eau *verticale*. Cela est sans doute dû à ce que son explosion produit une très forte suppression instantanée à son point d'impact sur la surface de l'eau; d'où percussion de pression à l'intérieur du liquide, analogue à celle que produirait la chute verticale d'un corps solide n'explosant pas : l'effet est un éclaboussement vertical, dû à l'ascension du liquide entourant le point d'impact (les parties du liquide situées immédiatement sous le point d'impact descendent au contraire, la distribution initiale des vitesses étant celle de la figure 3).

Si, au lieu de tomber sur l'eau, l'obus vient percuter dans un terrain boueux, c'est une colonne de boue que produit son explosion. Le terrain boueux peut, en effet, être assimilé à un liquide visqueux, et nous avons vu (n° 8) que la viscosité ne change que peu ou pas la répartition *initiale* des vitesses. Une forte viscosité ne laissant subsister que le début du mouvement, nous prévoyons, en regardant la figure 3, que le sol, immédiatement sous le point d'impact va s'affaisser, et qu'il va au contraire se surélever tout autour, produisant un entonnoir circulaire à lèvres saillantes [1].

Un phénomène analogue est bien connu des chasseurs : lorsqu'on tire un coup de fusil normalement à un terrain boueux, le point d'impact de chaque grain de plomb qui s'est enfoncé dans la boue est entouré de lèvres saillantes formant comme autant de véritables gaines ressortant à l'extérieur du sol, exagérant

---

[1] La ressemblance frappante entre ces entonnoirs et les cirques lunaires a conduit certains astronomes à supposer que ceux-ci pourraient être dus à des projectiles cosmiques, qui auraient autrefois bombardé la surface de la Lune. *Voir* J. Bosler : *Trous d'obus et cirques lunaires* (*Société astronomique de France*, Bulletin de février 1920)

énormément le relief dû à l'empreinte des gouttes de pluie sur un sol argileux.

A un autre point de vue, lorsqu'on tire sur un animal avec une arme rayée, on obtient des effets bien plus meurtriers avec une balle à méplat qu'avec une balle pointue. Ne peut-on y voir la raison suivante? Si nous assimilons le corps de l'animal à un liquide (visqueux) indéfini, le choc de la balle doit y produire des vitesses initiales réparties suivant la distribution que nous avons étudiée. Ces vitesses instantanées, dues à la percussion de pression, déchirent les tissus, où elles produiront des ravages d'autant plus grands qu'elles seront elles-mêmes plus fortes. Or nous avons vu (n° 13) que, pour un MV^2 donné, c'est-à-dire pour une même énergie cinétique de la balle, la force vive totale du milieu liquide est maxima lorsque la balle perd la moitié de sa vitesse [condition (7)]. Or, la balle à méplat est sans doute assez loin de perdre la moitié de sa vitesse [la formule (3) donne une idée approximative de cette perte de vitesse], mais en tout cas elle la perd assurément plus *brusquement* que la balle pointue.

Il est encore un phénomène que les considérations précédentes aident peut-être à comprendre : c'est celui du *ricochet* que subit un galet ayant la forme d'un disque plat lancé à plat presque horizontalement à la surface de l'eau. Supposons que, sur la figure 3, la partie hachurée représente un tel galet possédant, outre sa vitesse verticale descendante V, une vitesse horizontale $\mathcal{V}$ beaucoup plus grande et dirigée par exemple vers la gauche. A l'instant où le disque arrive à la surface de l'eau, la percussion, due à la composante V, donne au liquide les vitesses représentées par les lignes de courant tracées en pointillé, et cette percussion diminue beaucoup la composante verticale de la vitesse qu'elle réduit à v_0, tandis que la composante horizontale $\mathcal{V}$ reste presque inchangée (le galet se présentant horizontalement par la tranche). Le disque continue donc à s'avancer rapidement vers la gauche; mais quand il a avancé d'une longueur égale à son diamètre, on voit que les filets fluides viennent le choquer sur toute sa face inférieure avec une grande vitesse, lui faisant en quelque sorte subir une nouvelle percussion, dirigée vers le haut, et pouvant arriver à lui restituer une composante verticale de vitesse ascendante.

16. Je voudrais, en terminant, dire quelques mots sur un phénomène sans doute beaucoup plus complexe que la chute dans l'eau d'un corps solide : c'est la chute dans l'eau d'un corps liquide, dont l'exemple classique est la chute d'une goutte de vin dans l'eau ([1]).

Si la goutte de vin, au moment où elle vient en contact avec la surface de l'eau était *très aplatie*, il n'y aurait sans doute pas grand'chose à changer à la distribution initiale des vitesses de l'eau représentée par la figure 3, qui indique une grande vitesse ascendante pour les particules *d'eau* tout autour de la goutte, tandis que la goutte de vin elle-même continue à s'enfoncer avec une vitesse v_0.

Or, au moment où elle abandonne le compte-gouttes, la goutte qui tombe a une forme allongée verticalement, mais en tombant elle vibre et prend alternativement une forme allongée et aplatie; et l'expérience montre que la netteté du phénomène d'éclaboussement (ainsi que du tourbillon dont nous parlerons tout à l'heure) est fonction périodique de la hauteur de chute, le maximum de netteté correspondant probablement au cas où la goutte arrive au contact de l'eau dans sa phase la plus aplatie ([2]).

Quoi qu'il en soit, on peut se rendre compte que la goutte, même supposée parfaitement sphérique, doit certainement s'aplatir au moment du choc par suite de sa percussion sur la surface libre de l'eau, ce qui fait penser que les conclusions relatives à un disque plat ne doivent pas être grossièrement fausses dans le cas actuel. Représentons en effet (*fig.* 4) la goutte au moment où son élément superficiel le plus inférieur vient heurter la surface libre de

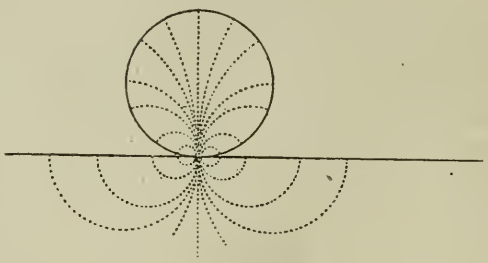
---

([1]) Le vin et l'eau ne donnent lieu à aucun phénomène gênant de tension superficielle au contact. Dans le cas où la goutte qui tombe serait formée par un liquide non miscible avec l'eau, et donnant lieu à une tension superficielle, l'anneau-tourbillon dont nous allons parler ne se formerait pas : la goutte continuerait sa chute verticale dans l'eau, en conservant à peu près sa forme sphérique. Cette chute a été étudiée très complètement dans un Mémoire de M. J. Boussinesq : *Contribution à la théorie de l'action capillaire...* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXXI, 1914).

([2]) *Voir* un Mémoire de M. H. Ollivier (*Annales de Chimie et de Physique*, 8e série, t. X, 1907, p. 229) : cet auteur a principalement pour but l'étude expérimentale du rejaillissement des petites gouttes sur un *solide* enfumé, mais il étudie aussi les vibrations des gouttes, et le choc d'une goutte liquide sur une couche liquide.

l'eau. La percussion, à cet instant, produit dans l'eau des vitesses initiales suivant des lignes de courant (tracées en pointillé) tangentes à la verticale du point d'impact et normales à la surface libre horizontale. Mais il y a percussion de pression aussi à l'inté-

Fig. 4.



rieur du milieu liquide qui forme la goutte, et cela y fait naître des vitesses initiales (s'ajoutant géométriquement à la vitesse de translation de la chute) suivant des lignes de courant tangentes à la verticale du point d'impact et normales à la surface libre sphérique de la goutte [1] : toutes ces vitesses initiales ont une composante centrifuge, tendant à renfler la goutte équatorialement et à l'aplatir.

On peut donc penser qu'une goutte de vin tombant à la surface de l'eau va s'aplatir, et qu'elle y donnera des effets initiaux assez comparables à ceux produits par la chute d'un disque plat, et qui sont représentés sur la figure 3. Or, sur cette figure, outre les grandes vitesses ascendantes d'éclaboussement des particules d'eau, nous voyons très nettement dessiné un autre phénomène : c'est le caractère franchement *tourbillonnaire* du mouvement de l'ensemble du liquide [2] ; si l'on complétait la figure par symétrie par rapport à la surface libre, les lignes de courant ne différeraient pas, en effet, de celles qui sont dues à une ligne-tourbillon annulaire. Nous devinons donc, en quelque sorte, la naissance d'un tourbillon de vin qui va ensuite persister en s'avançant à l'intérieur de l'eau, suivant la loi ordinaire de propagation des anneaux-tourbillons.

---

(1) Dans le cas du problème à deux dimensions, toutes ces lignes de courant seraient des circonférences.

(2) Ce qui n'empêche pas le potentiel des vitesses d'exister partout, seulement il devient discontinu sur la ligne-tourbillon elle-même.

La production de ce tourbillon de vin descendant, conforme à l'expérience, nous apparaît donc comme un phénomène imposé par l'hydrodynamique rationnelle, et dans lequel la viscosité ne joue guère de rôle, si ce n'est celui d'amortisseur. Mais si c'est là un phénomène rationnel, nous devons nous attendre à ce qu'il soit réversible, c'est-à-dire à ce qu'un tourbillon de vin ascendant (produit artificiellement dans l'eau) arrivant à la surface libre, jaillise hors de l'eau sous forme d'une goutte de vin. Or, c'est précisément ce que l'expérience vérifie. Reprenons la boîte en ferblanc percée d'un trou rond en mince paroi, dont nous avons parlé au n° 5, emplissons-la de vin et plongeons-la dans l'eau; au moyen d'une brusque et énergique compression des parois, faisons-en sortir un intense anneau-tourbillon de vin ascendant montant verticalement et rapidement vers la surface libre : au moment où ce tourbillon arrive à la surface, il en ressort sous forme d'un jet vertical, non pas tout à fait de vin pur, si l'anneau-tourbillon a traversé une couche de plusieurs centimètres d'eau, mais tout au moins d'eau rougie très foncée. Il serait intéressant, par une étude cinématographique, de voir jusqu'à quel point les deux phénomènes, chute de la goutte et ascension du jet sont inverses l'un de l'autre.

Assurément, toutes les considérations qui précèdent sont bien incomplètes et bien imprécises; l'imagination s'y permet des extrapolations plus ou moins plausibles. Mais, si elles sont loin d'avoir la prétention d'expliquer les phénomènes, peut-être peuvent-elles servir à en donner un commencement d'interprétation.

LES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE ET LES QUESTIONS QUI S'Y RATTACHENT [1]:

PAR M. C. DE LA VALLÉE POUSSIN.

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

La définition des fonctions à variation bornée est due à

[1] Conférence faite au Congrès international de Mathématiques à Strasbourg, le 25 septembre 1920.

M. C. Jordan. On la trouve pour la première fois dans une courte Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, séance du 31 janvier 1881. Elle a pour titre : *Sur la série de Fourier*. Le titre et le contenu de cette Note ne laissent aucun doute sur la manière dont l'illustre mathématicien français a été conduit à la notion qui nous intéresse.

Tout le monde connaît l'admirable Mémoire de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier. La démonstration s'applique aux fonctions bornées qui n'ont qu'un nombre limité d'extrémés et de discontinuités : ce sont les conditions dites de Dirichlet. La condition relative aux points de discontinuité est superflue. Mais, même après cette suppression, la condition de Dirichlet ne paraît pas *s'adapter* naturellement au problème, parce que la démonstration subsiste pour une somme de fonctions satisfaisant à cette condition, tandis que cette condition elle-même ne subsiste pas toujours. C'est cette anomalie que M. C. Jordan s'est proposé de faire disparaître.

Les fonctions à variation bornée sont celles qui peuvent se décomposer en une somme de deux autres satisfaisant aux conditions de Dirichlet (restreintes), ou, ce qui revient au même, celles qui sont *la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes*. Il est clair que les fonctions de cette nature constituent une famille bien définie et fermée, dans laquelle on peut effectuer les opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication et division, sans altérer le caractère précédent, pour autant qu'une fonction prise comme diviseur ne puisse pas tendre vers zéro.

Dans cette Note des *Comptes rendus*, M. C. Jordan pose déjà les premiers fondements de l'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée. Il donne, exactement comme nous le ferions aujourd'hui, le moyen de reconnaître si une fonction donnée $f(x)$ est à variation bornée dans un intervalle (a, b) et il définit sa *variation positive*, sa *variation négative* et sa *variation totale* dans cet intervalle. Il montre que les fonctions à variation bornée sont *intégrables* au sens de Riemann et que les intégrales indéfinies de fonctions bornées sont des fonctions à variation bornée.

M. C. Jordan est revenu sur les fonctions à variation bornée dans les deux éditions successives de son *Cours d'Analyse* (1881

à 1893) et il en a fait deux applications fondamentales, l'une à la détermination d'une *intégrale singulière*, l'autre à la *rectification des courbes*.

Il peut paraître étonnant que cette application à la rectification des courbes n'apparaisse que la seconde, alors que cette application est si naturelle qu'il semblerait que la notion de fonction à variation bornée eût dû être imaginée exprès pour cela. La condition pour qu'une ligne continue

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

soit rectifiable est que les deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient à variation bornée, et cette solution du problème de la rectification peut être considérée comme parfaite. Cette solution en appelait une autre, c'est celle de la *complanation des surfaces courbes*. A l'heure qu'il est, nous ne saurions encore rien dire de bien satisfaisant sur les conditions pour qu'une surface courbe

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \varpi(u, v)$$

soit quarrable et nous ne serions guère plus avancés qu'à l'époque des recherches précédentes de M. C. Jordan, sans celles toutes récentes de M. W.-H. Young [1].

Par contre, les recherches de M. C. Jordan sur les intégrales singulières et sur la série de Fourier ont été l'origine d'une foule de travaux ultérieurs. Ce serait beaucoup trop long de les énumérer tous et je ne signalerai ici que les plus importants. M. H. Lebesgue a publié *sur les intégrales singulières* [2] un travail considérable, où l'usage de la notion de fonction à variation bornée dans l'examen des questions de convergence est discuté du point de vue le plus général. Mais c'est surtout M. W.-H. Young, qui mérite d'être cité comme ayant poursuivi l'étude des séries de Fourier dans la voie ouverte par M. C. Jordan. C'est à lui que l'on doit les critériums de convergence les plus précis, les plus généraux, et j'ajouterai aussi les démonstrations les plus simples et les plus élégantes [3]. C'est à lui que l'on doit presque tout ce que l'on

---

(1) *Voir* sa Communication à la première Section du présent Congrès.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*

(3) *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe* (*Sitzungsberitche der Konigl. Bayer Ac. der Wiss.; Math. phys. Klasse.* Sitzung vom 10 Juni 1911).

sait sur la convergence de la série conjuguée [1]. C'est encore à lui que l'on doit le seul travail un peu général sur les séries de Fourier de plusieurs variables [2] et sur ce qu'il appelle les *séries de Fourier restreintes*. Dans tous ces Mémoires, c'est la notion de fonction à variation bornée qui est le ressort essentiel des démonstrations.

Cependant ce n'est point de ces travaux que j'ai l'intention de vous entretenir aujourd'hui. En vous en parlant avec plus de détails, je me disperserais beaucoup trop. La question dont je désire vous entretenir forme un ensemble d'une très grande unité, mais son objet est complètement différent des précédents. Et, en effet, le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens complètement inattendu et que l'inventeur de ces fonctions ne pouvait certainement pas prévoir, car ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de M. Lebesgue sur les intégrales définies.

Les recherches récentes sur les fonctions de variables réelles se divisent en deux grandes catégories : celles qui concernent l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles et qui constituent sans aucun doute un des plus beaux chapitres de la science mathématique moderne; ensuite celles qui se rattachent à la *Théorie générale des fonctions de variables réelles*, si l'on peut donner justement ce nom à la théorie fondée au début de ce siècle par MM. Baire, Borel et Lebesgue. Or, l'étude des fonctions à variation bornée forme encore aujourd'hui, et de beaucoup, la partie la plus importante de cette nouvelle théorie.

Cette théorie a permis de pousser extrêmement loin l'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée, de les disséquer en quelque sorte, de manière à faire apercevoir leurs parties constituées distinctes. Elle a fait apparaître une partie principale : *l'intégrale indéfinie*, et à côté de celle-ci certaines parties *singulières;* elle a montré l'identité des fonctions de point à varia-

---

(1) *On the convergence of a Fourier serie and of its allied series* (*Proc. of the London Math. Soc.*, 2e série, vol. X, part. 4, 1911).

(2) *On the Fourier Constants of a Function* (*Proc. of the Royal Society*, A, vol. LXXXV, 1911). *On Fourier Series and Functions of Bounded Variation* (*Ibid.*, vol VIII, 1913); *Sur la convergence des séries de Fourier* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 août 1916); *Sur les conditions de convergence des séries de Fourier* (*Ibid.*, 26 décembre 1916).

tion bornée avec les *fonctions additives d'ensemble*. Elle a dévoilé l'importance des fonctions à variation bornée dans les questions les plus importantes du *Calcul fonctionnel;* elle a ramené l'expression de toute *Fonctionnelle linéaire* à une *intégrale de Stieltjes*. Elle a donné ainsi à l'intégrale de Stieltjes une importance inattendue; elle lui assigne, en effet, un rôle fondamental dans la différentiation des fonctionnelles, puisque, d'après M. Hadamard, toute différentielle d'une fonctionnelle est une fonctionnelle linéaire

Telles sont les diverses questions, dont je veux vous entretenir et tel est en somme le résumé de cette conférence :

1° L'intégrale de Lebesgue;
2° Les fonctions d'ensemble;
3° L'intégrale de Stieltjes;
4° Les fonctionnelles linéaires.

Je vais donc avoir l'honneur de vous communiquer quelques réflexions d'un ordre extrêmement général sur ces diverses questions. Je n'ai pas d'autre but que d'exposer quelques-unes des idées qui me paraissent particulièrement importantes ou intéressantes et je me résigne à être très incomplet. Je prie les auteurs dont je ne citerai pas les noms de bien vouloir me pardonner.

II. — La définition de l'intégrale de Lebesgue.

La question concernant l'*intégrale de Lebesgue* qui a certainement préoccupé le plus grand nombre de mathématiciens, c'est celle de *sa définition*.

Les résultats contenus dans la Thèse de M. Lebesgue (1902) ont paru si beaux et si utiles et, d'autre part, la route suivie par l'auteur pour y arriver si longue et si difficile, qu'on s'est proposé d'en trouver une plus simple et de remplacer la définition primitive par d'autres définitions rivales, permettant de faire entrer, si possible, la nouvelle théorie dans l'enseignement classique.

Je vais donc avoir à vous parler de ces diverses définitions et à vous soumettre quelques-unes des réflexions qu'elles me suggèrent, n'ayant d'ailleurs en aucune manière la prétention de me poser en arbitre de leur valeur respective.

Pour faire apprécier à sa valeur l'importance et la portée de l'intégrale de Lebesgue, il convient de la mettre en rapport avec la *classification des fonctions* qui a été proposée quelques années auparavant par M. Baire [1], et que voici :

Les fonctions continues sont de classe 0;

Les fonctions limites de fonctions continues et qui ne sont pas de classe 0, sont de classe 1;

Les fonctions qui sont limites de fonctions de classe 1 et qui ne sont ni de classe 0, ni de classe 1, sont de classe 2, et ainsi de suite.

En même temps qu'une classification, nous apercevons ici un *procédé de construction* successive de fonctions de plus en plus compliquées, et l'on admettra volontiers que ce sont les seules auxquelles conduisent naturellement les calculs de l'analyse. Nous appellerons ces fonctions les *fonctions de Baire*. C'est l'étude des propriétés de ces fonctions qui constitue ce que nous avons appelé tout à l'heure la *théorie générale des fonctions de variables réelles*. L'importance de ces fonctions a été surtout mise en lumière par les travaux de M. Lebesgue.

Les fonctions continues et bornées sont intégrables par les méthodes élémentaires. Mais les fonctions des classes suivantes ne le sont plus, en général, même avec la définition de Riemann. Au contraire, toutes les fonctions de Baire deviennent intégrables, quelle qu'en soit la classe, avec la définition de Lebesgue.

D'où vient donc la puissance de cette définition et quel est le théorème qui en manifeste le mieux la supériorité?

Ce qui fait la généralité de la définition nouvelle, c'est qu'elle repose sur une propriété des fonctions, qui se conserve dans le passage à la limite (leur *mesurabilité*). Le théorème qui manifeste le plus clairement cette supériorité, c'est celui de l'*intégration terme à terme* (ou du passage à la limite sous le signe d'intégration). Ce théorème est le suivant :

Si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, bornées dans leur ensemble, converge vers une limite f, on a

$$\lim_{n=\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx. \tag{1}$$

---

[1] Thèse : *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1900).

On peut considérer ce théorème fondamental comme la conclusion et le couronnement de la théorie telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa Thèse (1902).

Avant Lebesgue, personne n'avait encore énoncé une propriété métrique des fonctions se conservant à la limite [1]. Après lui, on en a trouvé autant qu'on en a voulu.

Avant lui, l'intégration terme à terme était considérée comme une opération délicate, exigeant de grandes précautions. Après lui, il peut paraître tout simple de prendre cette propriété comme définition même de l'intégrale.

Remarquons, en effet, que la propriété exprimée par l'équation (1), à supposer seulement qu'elle ne soit pas contradictoire, suffit à elle seule pour définir l'intégrale de Lebesgue et que, tout au-moins en apparence, elle en donne une *définition constructive*.

En effet, par l'équation (1), nous pouvons définir l'intégrale d'une fonction f de classe 1 comme la limite de celle d'une fonction f_n de classe 0; de même, l'intégrale d'une fonction de classe 2 comme limite de celle d'une fonction de classe 1, et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une définition par récurrence qui semble suivre pas à pas le procédé même de construction des fonctions de Baire.

Que faudrait-il faire pour justifier cette définition?

Il suffirait de prouver l'*existence* et l'*unicité* de la limite écrite au premier membre de l'équation (1) et cela, de proche en proche, pour les fonctions de classe 0, de classe 1. .... Mais, si deux suites différentes de fonctions f_n tendent vers f, leur différence tend vers zéro. Tout revient donc à démontrer que, si une suite de fonctions de la même classe $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ tend vers zéro, on a aussi

$$\lim \int f_n \, dx = 0. \tag{2}$$

La justification de l'équation (2) pour la classe d'ordre (k) revient ainsi à la définition de l'intégrale des fonctions de la classe suivante $(k+1)$ par l'équation (1).

Chose bien remarquable, cinq ans avant la Thèse de M. Lebesgue, ce théorème avait été démontré par M. Osgood pour les fonctions

[1] Seul M. Baire avait énoncé une propriété descriptive jouissant de ce privilège et elle paraissait devoir rester stérile (Thèse citée).

continues. Donc la définition de l'intégrale des fonctions de la première classe de Baire en résultait. Personne ne s'en est aperçu. Rien ne prouve plus péremptoirement qu'il était bien difficile, sinon impossible, d'entrer dans cette voie avant les découvertes de M. Lebesgue.

Mais il y a une autre observation qui s'impose.

La *méthode constructive* dont nous venons d'esquisser la marche est illusoire. Le parallélisme qu'elle établit entre la construction des fonctions et celle de leurs intégrales est trompeur et ne repose sur aucune réalité. On s'en apercevrait, si l'on essayait de démontrer l'équation (2) pour les classes suivantes. Il n'y a pas, il ne peut pas y avoir, à mon sens, de méthode constructive pour définir l'intégrale de Lebesgue, parce que toute fonction de Baire est comprise entre deux fonctions de classe 2, qui ont la même intégrale. Les fonctions des classes supérieures à la deuxième ne se distinguent l'une de l'autre que par des propriétés descriptives, elles ne se distinguent pas par des propriétés métriques. La méthode constructive s'arrête à la deuxième classe, pour l'excellente raison qu'après cela, il ne reste plus rien de neuf à construire.

Ces réflexions préliminaires nous ont arrêtés quelques instants, mais elles ne seront pas inutiles. Elles vont nous permettre de situer à leur vraie place les définitions de M. Lebesgue et celles de ses successeurs, parmi lesquels je ne citerai que M. Borel et M. W.-H. Young.

Seule la définition de M. Lebesgue est complètement indépendante du théorème de l'intégration terme à terme et se rattache directement aux définitions antérieures de Cauchy et de Riemann. Toutes les autres définitions se rattachent, au contraire, au théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, ou tout au moins au procédé que M. Lebesgue a employé pour le démontrer. Elles s'apparentent à la méthode constructive que je viens de discuter, mais avec les différences profondes que comporte la nature même des choses.

La définition de Lebesgue se relie directement aux anciennes, parce qu'elle est, comme celles-ci, une définition *par le théorème de la moyenne*. Le théorème de la moyenne a toujours été considéré comme la propriété la plus immédiate, la propriété primordiale de l'intégrale. L'intégrale de Riemann est définie par

la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les intervalles. L'intégrale de Lebesgue est définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles de points, dont les intervalles ne sont que le cas particulier le plus simple. Mais ceci suppose que l'on sache mesurer les ensembles, tout comme les intervalles, et c'est pour cela que la *Théorie de la mesure des ensembles* a précédé celle de l'intégration.

Dans ce qu'elle a de plus original et de plus essentiel, cette théorie de la mesure est due à M. E. Borel. C'est lui qui a fait, pour la première fois, la somme des mesures d'une infinité dénombrable d'intervalles et c'est le ressort dont dépend assurément tout le reste de la théorie. M. Borel lui a consacré quelques lignes dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions de variables réelles* (1898). Ces lignes contiennent une *définition constructive* de la mesure, complète en principe et géniale, mais qui est à la définition actuelle, exactement, ce que la méthode constructive de définition de l'intégrale que je critiquais tout à l'heure, est aux définitions d'aujourd'hui. Elle appelait donc la même revision. Celle-ci a été faite par M. Lebesgue dans sa Thèse. C'est lui qui a exposé les véritables fondements de la théorie, en a aperçu la généralité et dévoilé la fécondité.

Pour l'instant, il est inutile de nous arrêter davantage aux méthodes de M. Lebesgue, sur lesquelles nous reviendrons encore brièvement plus loin. Nous allons nous occuper des autres définitions et, suivant en cela l'ordre historique, nous commencerons par celles de M. Borel.

M. Borel s'est proposé de débarrasser la théorie de l'intégration de celle de la mesure des ensembles et de réduire au minimum toute considération relative aux ensembles. Ses définitions se rattachent plus ou moins directement au théorème de l'intégration sous le signe et reviennent explicitement ou implicitement à définir l'intégrale d'une fonction de Baire comme la limite de celle d'une fonction continue ([1]).

Si l'on examine la démonstration du théorème de l'intégration terme à terme, telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa Thèse,

---

([1]) Une idée analogue a été développée par M. Fr. Riesz, *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 154, 1912, p. 641).

on en déduit aisément qu'une fonction f_n, qui converge vers une limite finie f, converge uniformément, pour tous les points qui sont extérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des mesures est aussi petite que l'on veut. C'est le principe qui est à la base des définitions de M. Borel.

M. Borel en a déduit une propriété extrêmement remarquable des fonctions de Baire. Le principe précédent prouve aisément que cette propriété se conserve à la limite et appartient, par conséquent, aux fonctions de toutes les classes successives. Voici cette propriété :

Toute fonction de Baire est continue quand on fait abstraction des points contenus dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des mesures est aussi petite que l'on veut.

Si l'on fait abstraction de ces intervalles gênants, on peut définir l'intégrale d'une fonction de Baire par des sommes tout analogues à celles de Riemann, et c'est une première définition de M. Borel [1].

Une seconde définition a été développée plus longuement [2], et paraît avoir les préférences de M. Borel, soit à cause de son caractère particulièrement élémentaire, soit parce qu'il est permis d'y voir un procédé effectif de calcul. Si l'on fait abstraction des intervalles gênants, toute fonction de Baire est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes. L'intégrale de cette fonction de Baire sera donc, par définition, la limite de celle d'un polynome.

Les définitions de M. Borel ont l'avantage de la concision et de la simplicité. Ce sont probablement celles qui conduisent à la notion de l'intégrale avec le minimum d'efforts. Mais elles ne sont pas complètement indépendantes de la théorie des ensembles et, en particulier des concepts nouveaux sur la mesure introduits par M. Borel dans ses *Leçons* de 1898. Bien au contraire, M. Borel s'était proposé formellement de les y rattacher.

---

(1) *Sur une condition générale d'intégrabilité* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 150, 1910, p. 508).

(2) *Sur le calcul des intégrales définies* (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 6e série; t. VIII, 1912).

M. W.-H. Young [1] est allé beaucoup plus loin. Il s'est proposé de débarrasser la théorie de l'intégration de tout emprunt à celle des ensembles; et, passant par-dessus toutes les recherches précédentes, aussi bien celles de M. Borel que celles de M. Lebesgue, de rattacher directement la définition de l'intégrale aux conceptions de M. Baire.

La tâche était assurément difficile, et si M. Young y a réussi, cela fait grand honneur à son habileté. Son procédé de démonstration tire toute sa force de la considération des suites monotones de fonctions. La convergence de ces suites présente des caractères particulièrement simples, qui ont été déjà signalés et utilisés à maintes reprises. Mais je crois que jamais personne n'a su en tirer un meilleur parti que M. H. Young.

Tout passage à la limite sur une suite de fonctions revient à deux passages à la limite consécutifs sur des suites monotones. De la sorte, toutes les fonctions de Baire peuvent être engendrées par des passages à la limite répétés sur des suites monotones. Il en résulte donc comme un dédoublement de la classification de M. Baire. C'est ce principe qui est à la base des idées de M. Young.

Voici maintenant comment on peut résumer sa définition.

Les fonctions limites de suites monotones de fonctions continues sont les fonctions semi-continues, soit par au-dessus, soit par au-dessous. On pourrait aisément définir les intégrales des fonctions semi-continues comme limites de fonctions continues, mais M. Young préfère les définir, suivant le cas, soit comme intégrales supérieures, soit comme intégrales inférieures de Jordan, ce qui revient au même.

Les intégrales des autres fonctions se définissent à partir des précédentes par un passage à la limite. M. Young démontre que toute fonction de Baire est comprise entre deux fonctions semi-continues dont les intégrales diffèrent aussi peu que l'on veut. Il observe à cet effet que c'est là une propriété qui se conserve à la limite. L'intégrale d'une fonction de Baire sera donc,

---

[1] *On the new method in the Theory of integration* (*Proc. of the London mathem. Society*, 1910); *On the new theory of integration* (*Proc. of the Royal Society*, 1913); *On the integration with report to a function of bounded variation* (*Proc. of the London math. Soc.*, 1913); *Sur les fondements de la théorie de l'intégration* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, 13 juin 1916).

par définition, la limite commune des intégrales de deux fonctions semi-continues qui comprennent la fonction considérée.

M. Young remarque que sa méthode s'applique aussi bien aux intégrales de Stieltjes, et il est, semble-t-il, le premier qui ait donné une définition générale de ces intégrales. Nous aurons à revenir sur cette question tout à l'heure.

Les définitions de MM. Borel et Young sont intéressantes et instructives. On peut les préférer à celles de M. Lebesgue pour leur simplicité. Pour ma part, mes préférences sont toujours restées à la définition de M. Lebesgue; je crois que c'est la plus naturelle et celle qui va le plus au fond des choses, et puis, surtout, c'est celle qui prépare le mieux à l'étude de l'intégrale comme *fonction d'ensemble*. Or c'est là un de ses caractères les plus essentiels, et nous allons bientôt y revenir.

Mais avant de quitter la présente question, il faut encore compléter la définition précédente qui ne s'applique qu'aux fonctions bornées, et introduire avec M. Lebesgue la définition des *fonctions sommables*.

Considérons d'abord une fonction positive et non bornée $f(x)$. Son intégrale est, par définition, la limite de celle d'une fonction bornée qui tend vers $f(x)$ en croissant. Cette limite peut être infinie, mais, si elle est finie, on dit que $f(x)$ est *sommable* et a cette limite pour intégrale.

Si la fonction non bornée change de signe, elle est la différence de deux fonctions non négatives. Si ces deux fonctions sont sommables, $f(x)$ et $|f(x)|$ le sont aussi. L'intégrale de $f(x)$ est alors bien déterminée et égale à la différence des intégrales des deux termes de cette différence.

Jusqu'ici, il n'a pas été question de fonction à variation bornée et j'ai peut-être paru oublier mon sujet. J'y reviens enfin avec la notion fondamentale de l'*intégrale indéfinie*.

Considérons l'intégrale d'une fonction sommable $f(x)$ étendue à un intervalle *variable* (a, x), à savoir

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Cette fonction de x est une *intégrale indéfinie*, ou, tout simplement, *une intégrale*. C'est une fonction à variation bornée

et sa variation totale dans l'intervalle (a, x) a pour valeur

$$\int_a^x |f(x)|\, dx.$$

Mais, comme nous aurons l'occasion d'y insister plus loin, la réciproque n'est pas vraie : une fonction à variation bornée n'est pas toujours une intégrale.

Les propriétés de l'intégrale indéfinie ont été étudiées par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904). Il a obtenu les théorèmes les plus remarquables.

Il donne d'abord, à la suite de M. Vitali, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ soit une intégrale indéfinie. Il faut pour cela que la somme des variations $f(\beta) - f(\alpha)$ de $f(x)$ sur un nombre quelconque d'intervalles non empiétants soit aussi petite que l'on veut avec la somme des longueurs des intervalles. On dit aujourd'hui, d'après M. Vitali [1], qu'une fonction qui vérifie cette condition est *absolument continue*.

C'est aussi dans ses *Leçons* de 1904 que M. Lebesgue a abordé l'étude de la dérivation des intégrales indéfinies et il a établi le résultat fondamental que voici :

Une fonction absolument continue $f(x)$ a une dérivée finie et déterminée $f'(x)$ presque partout, c'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle et elle est l'intégrale de cette dérivée considérée là où elle existe. On a, par conséquent, dans ce cas,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\, dx.$$

Par définition, un *ensemble de mesure nulle* est un ensemble de points qui peut être enfermé dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs peut être supposée aussi petite que l'on veut. *De tels ensembles peuvent être négligés dans l'intégration.* C'est là un principe fondamental, dont nous venons de rencontrer l'une des plus intéressantes applications.

---

[1] *Sull' integrazione per serie* (*Rend. del Circ. matem. di Palermo*, 1907); *Sui gruppi di punti et sulle funzioni di variabili reali* (*Rend. del R. Acc. delle Sc. di Torino*, 1908).

III. — Fonctions d'ensemble.

L'intégrale telle que nous venons de la définir est une *fonction* de point ou, si l'on veut, *une fonction de l'intervalle d'intégration* (a, x). Mais on peut aussi définir l'intégrale comme *fonction d'ensemble* et il est même nécessaire de se placer à ce point de vue pour en apercevoir quelques-unes des propriétés les plus essentielles.

Définir une fonction d'ensemble F, et il s'agit exclusivement ici d'ensemble de points, c'est établir une correspondance entre un ensemble E et un nombre F(E). Ce nombre, c'est la valeur de la fonction sur l'ensemble.

Quand on procède comme M. Lebesgue, l'intégrale se définit tout aussi immédiatement comme fonction d'ensemble que comme fonction d'intervalle. Nous savons en effet que, dans cette méthode, l'intégrale est précisément définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles. Nous y reviendrons plus loin à l'occasion de l'intégrale de Stieltjes.

Dans tous les cas, l'intégrale de $f(x)$ sur un ensemble E se ramène à une intégrale sur un intervalle (a, b) contenant E par un artifice très simple que nous allons indiquer et qui nous sera encore utile ailleurs.

Appelons *fonction caractéristique* de l'ensemble E une fonction $\theta(x)$ égale à 1 en chaque point de E et à zéro partout ailleurs. Si cette fonction est une fonction de Baire, l'ensemble E est *mesurable* (B), c'est-à-dire au sens de M. Borel. Nous ne considérons pas d'autres ensembles pour le moment.

L'intégrale de $f(x)$ sur E est, par définition,

$$F(E) = \int_a^b \theta(x) f(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx.$$

Sous cette forme, il apparaît immédiatement que si E est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$, non empiétants, *l'intégrale sur l'ensemble somme* $E_1 + E_2 + \ldots$ *est la somme des intégrales sur chaque partie.*

M. Lebesgue a exprimé cette propriété en disant que l'intégrale est une *fonction additive* d'ensemble. J'ai dit moi-même

que c'est une fonction *complètement additive*, en voulant souligner par là que la propriété s'étend à *un nombre infini* de parties. Ceci ne serait pas vrai pour l'intégrale de Riemann, qui n'est additive que pour la décomposition en un nombre fini d'intervalles.

La propriété additive correspond à la propriété *distributive* de la théorie générale des opérations. On regrettera peut-être l'abandon de ce terme. Il y a cependant lieu d'observer que le terme normal comporterait une restriction dans le cas actuel : la loi additive ne s'applique, en effet, à une somme d'ensembles que si ces ensembles sont *sans point commun* deux à deux ou non empiétants.

Considérée comme fonction d'un ensemble variable, l'intégrale prend, avec un sens un peu plus général que tout à l'heure, le nom d'*intégrale indéfinie*.

Nous venons de voir que cette intégrale est une fonction additive d'ensemble. Elle est aussi une fonction *absolument continue*. Cette propriété s'exprime maintenant sous une forme plus simple. Une fonction d'ensemble est absolument continue si elle est infiniment petite sur tout ensemble de mesure infiniment petite, c'est-à-dire contenu dans une somme d'intervalles dont la somme des mesures est infiniment petite.

Ces deux propriétés des fonctions d'ensemble : *additivité* et *absolue continuité*, caractérisent les intégrales indéfinies. Ce résultat essentiel est dû à M. Lebesgue, qui l'a énoncé dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale*, 1910 ([1]). Ce résultat prouve combien il est utile d'envisager l'intégrale comme fonction d'ensemble pour se rendre compte de sa véritable nature et de ses propriétés distinctives.

Tant que l'on se borne, comme nous le faisons en ce moment, aux ensembles linéaires et aux fonctions d'une seule variable, la *dérivée* de l'intégrale considérée comme fonction d'ensemble ne présente rien de nouveau et se ramène tout simplement à celle d'une fonction de point. Par définition, la dérivée en un point x de la fonction d'ensemble

$$\int_E f(x)\,dx$$

([1]) *Sur l'intégration des fonctions discontinues.*

est celle de la fonction de point

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

au point x. Si la dérivée n'existait pas, il y aurait toujours des *nombres dérivés*, *supérieurs et inférieurs*, *à droite et à gauche*, et ils seraient définis de la même façon pour la fonction d'ensemble que pour la fonction de point.

Les intégrales définies sont les plus simples et les plus importantes des fonctions additives d'ensemble, mais ce ne sont point les seules. Si l'on appelle *continue* une fonction d'ensemble qui est infiniment petite sur tout ensemble de diamètre infiniment petit, cette continuité, au sens large, n'entraîne pas l'absolue continuité; et, par conséquent, il peut exister des fonctions additives d'ensemble, même continues, qui ne sont pas des intégrales indéfinies.

Ce sont ces fonctions additives d'ensemble, considérées dans toute leur généralité, dont je vais maintenant m'occuper. Elles présentent à notre point de vue un intérêt capital, car nous montrerons bientôt l'identité de ces fonctions d'ensemble avec les fonctions à variation bornée. Il en résultera que le problème de la *décomposition* des fonctions à variation bornée en leurs parties constitutives revient au même problème pour les fonctions d'ensemble. Mais cette décomposition est bien plus claire et bien plus instructive sur les fonctions d'ensemble que sur les premières. C'est pourquoi c'est sur celles-ci que nous allons d'abord l'effectuer.

Cette importante question a été traitée tout d'abord par M. Lebesgue dans son Mémoire, déjà cité, publié dans les *Annales de l'École Normale*. Je suis revenu longuement sur cette question dans mon *Cours d'Analyse*, dans mon Mémoire de l'*American Journal* (1915) et dans mes *Leçons* faites au Collège de France (1916). Voici le résumé de ce que nous savons aujourd'hui :

Toute fonction additive d'ensemble F(E) est la différence de deux fonctions non négatives, $F_1(E)$ et $F_2(E)$, de même nature et bornées. Cette propriété correspond exactement à la propriété d'une fonction de point à variation bornée d'être la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes. On dira donc tout naturellement qu'une fonction additive d'ensemble est à variation

bornée et que les trois fonctions

$$F_1(E), \quad -F_2(E), \quad F_1(E)+F_2(E)$$

sont respectivement sa *variation positive*, sa *variation négative* et sa *variation totale* sur l'ensemble E.

Mais la décomposition de la fonction d'ensemble peut se faire à un tout autre point de vue, et cette nouvelle décomposition fait pénétrer bien plus profondément que la précédente dans la structure de ces fonctions, donc aussi dans celle des fonctions à variation bornée.

Dans le cas le plus général, une fonction additive d'ensemble, F(E) est la somme de trois autres fonctions analogues, jouissant de propriétés qui les caractérisent :

1° Une fonction des sauts, qui est essentiellement discontinue;

2° Une fonction singulière qui est continue, mais non absolument;

3° Une intégrale indéfinie, qui est absolument continue.

La *fonction des sauts* est formée de toutes les discontinuités de la fonction F(E). Elle est attachée à un ensemble *dénombrable* D : celui des points de discontinuité de cette fonction. Une notation commode permet de définir la fonction des sauts au moyen du même symbole F que la fonction initiale. Désignons par le produit DE la partie commune à l'ensemble fixe D et à l'ensemble variable E, la fonction des sauts peut se représenter par F(DE).

La *fonction singulière* est attachée à un *ensemble singulier* S *de mesure nulle* et, avec la même convention que dans le cas précédent, on peut la représenter par F(SE).

La troisième partie est une *intégrale indéfinie*. Pour en reconnaître la nature et en obtenir l'expression, il convient de définir la *dérivée d'une fonction d'ensemble* au point x. Ce sera la dérivée de la fonction de point $f(x)$, obtenue en considérant la fonction d'ensemble F sur l'intervalle (a, x), tout comme dans le cas de l'intégrale indéfinie.

Avec cette définition, la fonction des sauts et la fonction singulière ont des dérivées nulles presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle; la fonction F(E) a presque partout

une dérivée $f'(x)$ et l'intégrale définie qui constitue la troisième partie de F est l'intégrale de cette dérivée.

La décomposition de F(E) en ses trois éléments distincts se fait donc par la formule

$$F(E) = F(DE) + E(SE) + \int_E f'(x)\,dx.$$

Ces trois termes sont bien réellement distincts puisque l'intégrale est nulle sur tout ensemble de mesure nulle et la fonction singulière, nulle sur tout ensemble dénombrable.

Mais, pour effectuer cette décomposition, il faut savoir déterminer les ensembles D et S.

La détermination de l'ensemble dénombrable D ne donne lieu à aucune difficulté. Elle est en quelque sorte immédiate, puisque l'ensemble D est celui des points de discontinuité de F(E), c'est-à-dire celui des points sur chacun desquels F a une valeur non nulle; et F(D) est la somme des valeurs de F en chacun des points de D : c'est précisément ce qui prouve que D est dénombrable.

Par contre, la détermination précise de l'ensemble singulier S est plus difficile et je me suis beaucoup occupé de la faire dans les publications que j'ai mentionnées plus haut. J'ai montré que S est l'ensemble des points où F(E) a une dérivée unique infinie de signe déterminé. J'ai encore montré que la décomposition de S en la somme des deux ensembles S_1 et S_2 sur lesquels la dérivée est positive ou négative, fournit, en même temps, la décomposition de la fonction singulière en ses variations positives ou négatives par la formule

$$F(SE) = F(S_1E) + F(S_2E).$$

Comme je l'ai déjà dit, ce qui donne à ces décompositions tout leur intérêt au point de vue qui nous occupe, c'est qu'elles s'appliquent aux fonctions à variation bornée. Il y a, en effet, *identité* entre les fonctions additives d'ensemble et les fonctions de point à variation bornée. J'ai mis cette identité en évidence dans les Mémoires que je rappelais encore il y a un instant. Le moment est venu de montrer comment ces deux sortes de fonctions se ramènent l'une à l'autre.

Il est immédiat qu'une fonction additive d'ensemble F(E) définit une fonction de point $f(x)$ qui est à variation bornée. Il suffit

d'attribuer à $f(x)$ la valeur de F(E) sur l'intervalle variable (a, x). Le problème délicat est le problème inverse : *Étant donnée une fonction de point à variation bornée, $f(x)$ définit-elle une fonction additive d'ensemble mesurable* (B)?

La réponse est affirmative. M. Radon l'a prouvé dès 1913 [1]. Je l'ai montré aussi dans mon Mémoire de l'*American Journal* de 1915 et dans mes *Leçons* de 1916. *Le problème de construire la fonction d'ensemble* F(E), *quand la fonction à variation bornée $f(x)$ est donnée, est une simple généralisation du problème de la mesure tel qu'il a été posé et résolu par MM. Borel et Lebesgue.* La définition de F(E) est un problème qui contient la définition de la mesure comme cas particulier. Mais, chose extrêmement remarquable et sur laquelle j'insiste, le problème particulier de la mesure ne comporte, relativement au problème général, aucune espèce de simplification.

Voici quelques indications sur le raisonnement que j'ai employé. Il suffit évidemment de construire la fonction d'ensemble F(E) pour une fonction de point $f(x)$ à variation bornée et *non décroissante*. D'abord la fonction de point $f(x)$ définit une fonction additive d'intervalles. Soit, en effet, ω l'intervalle (α, β); cette fonction de l'intervalle ω sera définie par la formule

$$F(\omega) = f(\beta) - f(\alpha) = \Delta f;$$

elle est donc *non négative*.

Il s'agit alors de montrer que la correspondance ainsi établie entre F et les intervalles s'étend à tous les ensembles mesurables (B). Or le raisonnement à faire est absolument identique à celui dont M. Lebesgue s'est servi pour définir la mesure de ces mêmes ensembles; et le problème de la mesure n'est qu'un cas particulier du précédent : celui où l'on prend $f(x) = x$, auquel cas $\Delta f = \beta - \alpha$ est précisément la mesure de l'intervalle ω. Il est tout aussi simple de traiter le cas général que celui de la mesure. J'y ai déjà insisté.

La solution du problème précédent prouve *l'identité des fonc-*

---

[1] J. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut. Mengenfunktionen* (*Sitzungsber. d. Kom. Ak. d. Wiss. in Wien, Math. Naturwiss. Klasse*, Bd CXXII, Abt. II *a*, Juli 1913).

tions de point à variation bornée et des fonctions additives d'ensemble.

A vrai dire, lorsque M. Radon et moi avons cherché la solution directe du problème précédent, ce problème était implicitement résolu, mais indirectement, par les recherches antérieures de M. Lebesgue sur l'intégrale de Stieltjes, au moins pour les fonctions d'une seule variable. Je ne m'en étais pas aperçu et j'aurai l'occasion d'y revenir tout à l'heure.

IV. — Extension a un nombre quelconque de variables.

Pour simplifier mon exposition, je n'ai considéré jusqu'ici que les fonctions d'une seule variable et les fonctions d'ensemble à une seule dimension. Mais les théories précédentes s'étendent à l'espace et à l'hyperespace. Certaines d'entre elles ont même été exposées de prime abord dans l'hypothèse la plus générale.

Les définitions de la mesure des ensembles, de l'intégrale de Lebesgue, de l'intégrale indéfinie, des fonctions additives d'ensemble s'étendent si naturellement à un nombre quelconque de dimensions qu'il nous suffira de constater que cette extension est immédiate. Par contre, la dérivation des fonctions d'ensemble et la définition des fonctions de points à variation bornée soulèvent, dans le cas de plusieurs dimensions, des difficultés qui leur sont propres. Pour généraliser les théorèmes relatifs à la dérivation des intégrales indéfinies, il faut introduire dans la définition de la dérivée certaines restrictions qui ont été indiquées par MM. Vitali et Lebesgue. Comme l'a montré M. Lebesgue dans son Mémoire des *Annales de l'École Normale* de 1910, tous les théorèmes sur la dérivation des intégrales indéfinies peuvent alors être étendus au cas général. M. Lebesgue caractérise la restriction à introduire en spécifiant que la dérivation doit se faire au moyen de ce qu'il appelle des « familles régulières d'ensembles ».

Par contre, la définition de la dérivée utilisée par MM. Vitali et Lebesgue est insuffisante pour généraliser les théorèmes relatifs à la dérivation des fonctions d'ensemble qui ne sont pas absolument continues. Je me suis particulièrement occupé de cette question dans mon Mémoire de l'*American Journal* et j'ai montré que l'on arrive au but en particularisant davantage encore la défini-

tion de la dérivée et en utilisant ce que j'ai appelé la *dérivation sur un réseau*.

La définition des fonctions de point à variation bornée a été donnée par M. Vitali pour les fonctions de plusieurs variables [1]. L'identité de ces fonctions avec les fonctions additives d'ensemble a été établie par les recherches de M. Radon et les miennes. Ainsi toutes les questions que nous avons posées et résolues précédemment pour le cas d'une seule variable sont également résolues pour le cas général.

J'ai attiré tout à l'heure votre attention sur l'importante généralisation de la mesure des ensembles qui conduit à définir une fonction d'ensemble en partant d'une fonction d'intervalle. L'intégrale de Lebesgue est susceptible d'une extension qui correspond point pour point à cette extension de la notion de la mesure et conduit à l'*intégrale généralisée de Stieltjes*. C'est de celle-ci qu'il convient maintenant de nous occuper.

V. — L'intégrale généralisée de Stieltjes.

Stieltjes est le premier qui ait défini l'intégration d'une fonction continue par rapport à une fonction à variation bornée [2]. On a donné son nom à l'intégrale ainsi construite. L'intégrale de Stieltjes a pu passer jusque dans ces derniers temps pour une construction assez artificielle; mais son importance a été mise en lumière par plusieurs géomètres dans des travaux récents. Bien plus, comme nous allons le voir bientôt, elle se présente naturellement comme solution de la question la plus importante du calcul fonctionnel.

Voici d'abord la définition de Stieltjes.

Soient $f(x)$ une fonction continue et $\alpha(x)$ une fonction à variation bornée (continue ou non) dans l'intervalle (a, b). On partage cet intervalle en intervalles élémentaires (x_i, x_{i+1}) comme d'habitude, on prend arbitrairement ξ_i dans (x_i, x_{i+1}) et l'on fait la somme, étendue à tous les intervalles élémentaires,

$$\Sigma f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)].$$

---

(1) Mémoire cité.

(2) *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. VIII, 1894, p. 1-122).

Cette somme a une limite quand tous les intervalles tendent vers zéro. Cette limite est l'*intégrale de Stieltjes*. Elle se représente par la notation

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

La définition de Stieltjes suppose essentiellement la fonction $f(x)$ continue. La question se pose de savoir si l'on peut étendre la définition à un champ fonctionnel plus vaste et, en particulier, à celui des fonctions de Baire.

M. Lebesgue, qui a posé cette question, en a donné la solution dans un article des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1910 (¹). L'extension se fait en ramenant l'intégrale de Stieltjes à une intégrale de Lebesgue par un changement de variables. Ce procédé mérite de nous arrêter un instant et nous allons le présenter en le réduisant à sa forme la plus simple. Remarquons que, si $\alpha(x)$ est la somme de deux fonctions à variation bornée, l'intégrale relative à $\alpha(x)$ est la somme des intégrales relatives à chaque terme. Il suffit donc de faire la réduction pour une fonction $\alpha(x)$ *croissante* dans tout intervalle, car toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions telles. Dans ce cas particulier, auquel revient le cas général, le procédé de M. Lebesgue consiste à prendre $\alpha(x)$ comme variable d'intégration. Alors x est une fonction uniforme de α et l'intégrale de Stieltjes se transforme dans l'intégrale de Lebesgue

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f[x(\alpha)]\,d\alpha.$$

Ainsi se trouve faite, sans aucun calcul, l'extension de la définition à toutes les fonctions $f(x)$ de Baire. Cette transformation étend, par le fait même, aux intégrales de Stieltjes la propriété fondamentale de l'intégrale de Lebesgue relative à l'intégration terme à terme.

L'analyse des fonctions à variation bornée qui a été résumée précédemment permet de faire une décomposition intéressante de

(¹) *Les intégrales de Stieltjes*, vol. 150, p. 86-88. J'ai utilisé moi-même, dès 1903, une transformation équivalente à celle de M. Lebesgue, mais en vue de ramener les intégrales curvilignes à des intégrales ordinaires (*Cours d'Analyse*, t. I, 1re édit., n° 304).

l'intégrale de Stieltjes, décomposition qui a été indiquée par M. Maurice Fréchet au *Congrès des Sociétés savantes* de 1913 (¹). Nous savons que toute fonction $\alpha(x)$ à variation bornée est la somme de trois fonctions

$$\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x),$$

dont la première est une intégrale, la seconde la fonction singulière, la troisième la fonction des sauts. Cette décomposition entraîne donc celle de l'intégrale de Stieltjes en trois intégrales correspondantes qui sont chacune d'un type essentiellement différent et irréductibles l'une à l'autre.

J'ai déjà signalé précédemment qu'il y a une relation entre l'intégrale de Stieltjes et le problème de déterminer la fonction d'ensemble, définie par une fonction de point, $\alpha(x)$, à variation bornée. Constatons, en passant, que les résultats obtenus, dès 1910, par M. Lebesgue permettaient, au moins dans le cas d'une seule variable, de résoudre ce problème. En effet, la valeur de cette fonction α sur l'ensemble E, contenu dans (a, b), sera définie par l'intégrale de Stieltjes :

$$\alpha(E) = \int_a^b \theta(x)\, d\alpha(x),$$

où $\theta(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Quels que soient leur intérêt et leur valeur, les recherches de M. Lebesgue sur l'intégrale de Stieltjes n'avaient point un caractère définitif. D'abord la méthode de M. Lebesgue ne s'étend pas aisément aux fonctions de plusieurs variables (²). D'autre part, la réduction de l'intégrale de Stieltjes à une intégrale de Lebesgue peut être considérée comme inutile, car de même que la valeur d'une fonction à variation bornée sur un ensemble E se définit ni plus ni moins facilement que la mesure de E, de même, l'intégrale de Stieltjes n'est pas plus difficile à définir directement que celle de Lebesgue. C'est ce que M. W.-H. Young a montré. La méthode de M. Young pour définir l'intégrale de Lebesgue s'applique ni plus ni moins simplement à la définition de celle de Stieltjes

(¹) *Sur les fonctionnelles linéaires et l'intégrale de Stieltjes*, Paris, Imprimerie nationale, 1914.

(²) L'extension est cependant possible, comme on le verra plus loin.

et l'extension au cas d'un nombre quelconque de dimensions est immédiate ([1]).

L'avantage de s'appliquer à la définition de l'intégrale de Stieltjes n'est pas exclusivement propre à la méthode de M. Young. La méthode primitive de M. Lebesgue, pour définir son intégrale, possède le même avantage et l'on peut arriver à l'intégrale de Stieltjes, dans le cas le plus général, en suivant pas à pas la voie ouverte par M. Lebesgue dans sa Thèse. La solution du problème est complètement fournie par la théorie des fonctions d'ensemble. C'est ce que nous allons montrer en considérant, pour fixer les idées, des fonctions d'une seule variable.

Soient $f(x)$ une fonction de Baire supposée bornée, et $\alpha(x)$ une fonction à variation bornée dans un intervalle (a, b). Celle-ci définit une fonction d'ensemble que nous représenterons par $\alpha(E)$ et dont la détermination correspond exactement, comme nous le savons, au problème de la mesure des ensembles.

Ceci posé, pour définir l'intégrale de Lebesgue, que je considère pour commencer,

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

on désigne par l et L deux bornes comprenant $f(x)$, égalité exclue; on construit une échelle de nombres

$$l_1 = l,\ l_2,\ l_3,\ \ldots\ l_i,\ l_{i+1},\ \ldots\ l_{n+1} = L;$$

on désigne par E l'ensemble des points de (a, b) où $f(x)$ vérifie la condition

$$l_i \leqq f < l_{i+1},$$

et l'on construit les deux sommes

$$\Sigma\, l_i(m\mathrm{E}_i),\quad \Sigma\, l_{i+1}(m\mathrm{E}_i),$$

où mE est la mesure de E. L'intégrale de Lebesgue est la limite commune de ces deux sommes, quand les degrés de l'échelle tendent vers zéro.

([1]) La définition de l'intégrale de Stieltjes au cas de plusieurs variables dans l'hypothèse restreinte de la continuité, a été faite tout d'abord par M. Maurice Fréchet (*Nouvelles Annales de Mathém.*, 4e série, t. IV, avril 1909, p. 1-17). Comparer avec la définition plus générale du même auteur dans son article *Sur les fonctionnelles linéaires* (*Trans. of the Americ. Journ. of Math.*, July 1915).

L'intégrale de Stieltjes, relative à la fonction $\alpha(x)$ à variation bornée,

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

se définit exactement de la même manière que celle de Lebesgue, sauf que l'on remplace la mesure de E par la valeur de la fonction $\alpha(E)$ sur cet ensemble. L'intégrale de Stieltjes est donc la limite commune des deux sommes [1]

$$\Sigma\, l_i\,\alpha(E_i), \quad \Sigma\, l_{i+1}\,\alpha(E_i).$$

Toute la théorie de l'intégrale de Lebesgue s'étend à celle de Stieltjes. Ainsi, on peut aussi bien définir l'intégrale de Stieltjes sur un ensemble E que sur un intervalle. C'est une fonction additive d'ensemble, mais qui, en général, n'est pas absolument continue. On voit enfin que, sous cette forme, l'extension à un nombre quelconque de variables est immédiate.

VI. — Opérations fonctionnelles.

J'arrive à la dernière partie de mon exposé.

On peut rattacher les fonctions d'ensemble que nous avons considérées jusqu'ici à des considérations d'un ordre plus général.

Une fonction d'ensemble établit une correspondance entre un certain ensemble E et un nombre. Une telle correspondance s'appelle une *opération fonctionnelle*, ou tout simplement une *fonctionnelle*. L'étude des propriétés de cette correspondance est le *Calcul fonctionnel*. On peut trouver les premiers exemples du Calcul fonctionnel dans les recherches de M. Volterra sur les fonctions de lignes (1887), mais on doit à M. Fréchet le premier essai d'une théorie générale de ce calcul [2].

Les fonctions additives d'ensemble se rattachent à des fonctionnelles particulières sur lesquelles M. Hadamard a attiré l'attention

---

[1] Sous cette forme, la définition a été donnée par M. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen* (*Sitzungsbericht d. Kais. Ak. d. Wiss. in Wien*, Bd CXXII. Abt. II *a*, Juli 1913, p. 28-33).

Il faut aussi signaler dans le même ordre d'idée M. Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1915, p. 148-265).

[2] *Rendiconti di Palermo*, 1906.

et auxquelles il a donné le nom de *fonctionnelles linéaires* (¹). Il considère le cas où la valeur V de la fonctionnelle dépend, non pas comme précédemment d'un ensemble E, mais de la forme d'une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b). Nous désignerons cette correspondance par $V(f)$.

La fonctionnelle est *linéaire* si elle possède les deux propriétés suivantes :

1° Elle est *distributive*, c'est-à-dire que l'on a

$$V(f_1 + f_2) = Vf_1 + Vf_2;$$

2° Elle est *bornée*, c'est-à-dire que l'on peut assigner deux nombres positifs A et λ tels que si $|f| < A$, on ait

$$V(f) < \lambda A.$$

On s'assure aisément que si cette condition est réalisée pour les deux nombres A et λ, elle subsiste, en vertu de la propriété distributive, pour toutes les autres valeurs positives de A, et cela avec la même valeur de λ.

Une fonction additive d'ensemble, F(E), établit une correspondance qui se ramène à la précédente par un artifice. Il suffit de remplacer l'ensemble E par sa fonction caractéristique $\theta(x)$. On définit la fonctionnelle $V(\theta)$ en lui attribuant la valeur F(E). Avec cette définition, il est vrai, la fonctionnelle $V(\theta)$ n'est distributive que pour les fonctions caractéristiques d'ensembles *sans point commun*. Mais cette restriction n'empêche pas la théorie des fonctions additives de rentrer entièrement dans celle des ensembles linéaires. Il est facile de s'en assurer.

C'est, sans doute, M. Fr. Riesz qui a fait faire à la théorie des fonctionnelles son progrès le plus important. Il a démontré (²) en effet que toute *fonctionnelle linéaire peut être mise sous la forme d'une intégrale de Stieltjes*

$$V(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

(¹) *Calcul fonctionnel* (*Enseignement mathématique*, 1911).

(²) *Comptes rendus Acad. Sc.*, 29 novembre 1919, et *Annales de l'Ecole Normale*, 1914. [Ce résultat était préparé par M. Hadamard (*Calcul des variations*, p. 299).]

ce qui ramène l'étude des fonctionnelles linéaires aux théories précédentes.

Ce résultat serait presque immédiat si le champ des fonctions f comprenait, outre les fonctions continues, les fonctions qui ne prennent que les seules valeurs 0 et 1 et n'ont qu'un nombre limité de points de discontinuité. En effet, posons *a priori* la formule précédente; elle montre que, si $f(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle (a, x), la fonctionnelle se réduit à $\alpha(x)$. Cette remarque permet de calculer la fonction inconnue $\alpha(x)$ et l'on vérifie *a posteriori* que la formule ainsi posée satisfait à toutes les conditions du problème.

La seule difficulté est donc de montrer que le champ fonctionnel peut être étendu à ces fonctions caractéristiques. C'est un problème tout à fait analogue à celui d'étendre l'intégrale de Stieltjes aux fonctions discontinues. Il a été résolu par M. Riesz [1] en utilisant très habilement les passages à la limite sur les suites monotones de fonctions. Il est à peine besoin de signaler le parallélisme entre les procédés de M. Riesz pour traiter cette question et ceux qui ont été employés par M. Young dans la théorie de l'intégrale de Stieltjes.

L'expression d'une fonctionnelle linéaire au moyen de l'intégrale de Stieltjes conduit à des conséquences extrêmement intéressantes. Elle montre, en particulier :

1° Que *toute fonctionnelle linéaire de fonctions continues s'étend d'elle-même à toutes les fonctions de Baire;*

2° Que, *si l'on envisage une fonctionnelle linéaire* $V(f)$ *dans un champ de fonctions bornées, le passage à la limite sous le signe* V *est permis sans aucune restriction, que la convergence soit uniforme ou ne le soit pas.* Le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

Plus généralement, nous pourrions considérer l'ensemble des fonctions $f(x, y)$ de deux variables dans le rectangle R limité aux intervalles $(0, 1)$ des variables x et y. Une fonctionnelle linéaire de telles fonctions serait encore représentée par une intégrale de

---

[1] *Annales de l'École Normale*, 1914.

Stieltjes, généralisée pour deux variables,

$$V(f) = \int\int_R f(x, y)\, d_x d_y \alpha(x, y),$$

où $\alpha(x, y)$ est à variation bornée, et il est clair que ces conclusions s'étendent à un nombre quelconque de dimensions.

Mais il est intéressant de remarquer, et cela n'a peut-être pas encore été fait, que le cas de plusieurs variables se ramène au cas d'une seule par un artifice dont M. Lebesgue s'est servi à diverses reprises dans les questions analogues. Cet artifice fait intervenir la courbe de Peano

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

qui passe par tous les points du carré R quand t varie de 0 à 1, et qui établit une correspondance univoque entre les points du carré et ceux de l'intervalle, sauf pour une infinité dénombrable d'entre eux. Cette courbe établit donc une correspondance entre les deux fonctions

$$f(x, y) \quad \text{et} \quad f(\varphi, \psi) = f(t).$$

Par conséquent, la fonctionnelle $Vf(x, y)$ définit une fonctionnelle de même valeur $Vf(t)$ et l'on a, par le théorème de Riesz,

$$Vf(x, y) = Vf(t) = \int_0^1 f(t)\, d\beta(t),$$

où $\beta(t)$ est à variation bornée. La réduction est faite. Mais on peut tirer de là une autre conséquence intéressante.

Comparons les deux expressions de la même fonctionnelle $V(f)$, nous obtenons la formule suivante :

$$\int\int_R f(x, y)\, d_x d_y \alpha(x, y) = \int_0^1 f(t)\, d\beta(t),$$

qui ramène toute intégrale double de Stieltjes à une intégrale simple de même nature.

C'est probablement la première fois que cette réduction est signalée pour l'intégrale de Stieltjes. Mais j'ai déjà effectué cette réduction en 1910 [1] pour l'intégrale de Lebesgue. Cette réduc-

---

[1] *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*

tion se fait alors pour la formule plus simple

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 f(\xi, \eta)\, dt.$$

On pourrait assurément établir la formule de réduction d'une intégrale double de Stieltjes à une intégrale simple de même nature, sans passer par l'intermédiaire des fonctionnelles. On aurait ainsi un procédé permettant d'étendre à un nombre quelconque de variables les méthodes utilisées tout d'abord par M. Lebesgue pour généraliser la définition de l'intégrale de Stieltjes dans le cas d'une seule.

Les fonctionnelles linéaires ont une importance à part, parce qu'elles s'introduisent tout naturellement dans l'une des questions les plus importantes que l'on puisse se poser sur les fonctionnelles, à savoir celle de leur *différentiation*. La question de la différentiation des fonctionnelles à ce point de vue particulier est encore toute récente. Presque tout ce que nous savons de cette importante question se trouve contenu dans deux Mémoires fondamentaux publiés en 1913 (1) et 1914 (2) par M. Maurice Fréchet.

Le premier essai pour appliquer aux fonctionnelles les procédés du calcul différentiel est déjà ancien. Il paraît dû à M. Volterra, qui s'est occupé de la différentiation des fonctions de lignes. La méthode de M. Volterra consiste à opérer avec la *variation* de la fonctionnelle au sens où l'on entend ce mot dans le calcul des variations, et cette méthode conduit déjà à des résultats d'une grande généralité (3). Mais M. Fréchet prend son point de départ dans une définition proposée par M. Hadamard (4) et qui consiste à considérer comme différentiable toute fonctionnelle dont la variation est une *fonctionnelle linéaire* par rapport à l'accroissement de l'argument. Cette définition s'étend sans aucune difficulté aux fonctionnelles qui dépendent de plusieurs arguments, et

(1) *Sur la notion de différentielle et le calcul fonctionnel* (Extrait des *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes en* 1912 : *Sciences*).

(2) *Sur la notion de différentielle d'une fonction de lignes* (*Transact. of the Am. Mathem. soc.*, 1914).

(3) Vito Volterra, *Sopra le funzioni che dependono da altre funzioni*. Nota I, II, III (*Rendic. della R. Acc. dei Lincei*, vol. III°, 1887).

(4) *Le Calcul fonctionnel* (*Enseignement mathématique*, 1911).

l'on obtient des extensions extrêmement remarquables des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel.

J'ai malheureusement trop abusé de votre temps et de votre bienveillante attention pour en dire davantage sur cette intéressante question et il est urgent de conclure cette trop longue conférence.

Conclusion.

Quel peut être dans l'avenir le développement des applications des fonctions à variation bornée? Je vais risquer un mot de réponse à cette question.

Dans la voie ouverte par M. C. Jordan, c'est-à-dire dans la recherche des conditions de convergence, il semble que le domaine des applications soit illimité. Chaque fois que la question de convergence se présentera dans la représentation d'une fonction par un mode nouveau, l'hypothèse que la variation est bornée sera l'une des premières qui viendra à l'esprit et elle conduira presque toujours à des résultats utiles.

Nous avons parcouru, d'autre part, les questions que posent les relations de l'intégrale de Lebesgue avec les fonctions à variation bornée. Il semble que toutes ces questions soient résolues d'une manière satisfaisante. Les nouvelles extensions de la notion d'intégrale se détachent de ces fonctions et l'intégrale de Denjoy, en particulier, qui est la plus importante, cesse d'être une fonction à variation bornée.

Par contre, les problèmes relatifs à la théorie et à la différentiation des fonctionnelles sont à peine entamés. Espérons que la théorie des fonctions à variation bornée, qui a pris racine sur le sol de France avec les travaux de M. Jordan, continuera à se développer à l'Université de Strasbourg redevenue française, et particulièrement entre les mains de M. Maurice Fréchet : ses derniers travaux appellent de nouvelles recherches et permettent de légitimes espérances.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MUIR (Thomas). — THE THEORY OF DETERMINANTS IN THE HISTORICAL ORDER OF DEVELOPMENT [La théorie des déterminants dans l'ordre historique de son développement].

Vol. I : Part I. *General determinants up to* 1841 ; Part II. *Special determinants up to* 1841 : 1 vol. in 8°, 2nd édition, XI-491 pages, 1906.

Vol. II : *The Period* 1841 *to* 1860 : 1 vol. in-8°, XVI-475 pages, 1911.

Vol. III : *The Period* 1861 *to* 1880 : 1 vol. in-8°, XXVI-503 pages, 1920 London, Macmillan and Co., Ltd.

L'Ouvrage considérable, dont les trois premiers Volumes ont seuls paru jusqu'à présent, constituera une source inestimable de renseignements pour tous les mathématiciens qui s'intéressent à l'histoire de la théorie des déterminants. L'auteur a été conduit à l'entreprendre en constatant, au cours de la rédaction de son *Treatise on the theory of Determinants*, combien difficiles étaient les recherches de paternité de tel ou tel théorème célèbre ; il en est du reste ainsi dans toutes les branches de la science ! Il résolut alors d'établir la liste chronologique, autant que possible complète, de tous les articles, Mémoires, Ouvrages traitant des déterminants : le résultat de ses recherches fut publié dans le *Quarterly Journal of Mathematics ;* trois listes successives, parues dans les Volumes XVIII (1881), XXI (1886), XXXVI (1904-1905), contenaient approximativement 1740 titres et fournissaient l'inventaire à peu près complet de tout ce qui avait été publié sur les déterminants jusqu'à la fin du XIXe siècle. Entre temps, l'auteur avait entrepris des comptes rendus plus ou moins détaillés de tous ces Mémoires et en avait commencé la publication dans les *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, mais il se rendit bientôt compte qu'il serait préférable de rassembler en un tout ces renseignements épars dans les différents numéros d'une Revue, et c'est là l'origine de l'Ouvrage que nous avons à analyser.

Le court historique qui précède suffit à faire voir de quelle

manière l'auteur a conçu sa tâche. Les différents Mémoires qui traitent, même incidemment, des déterminants, sont successivement passés en revue et un compte rendu plus ou moins détaillé en est fait. Le premier Volume va des origines à 1841, le second de 1841 à 1860, le troisième de 1861 à 1880. Dans chaque Volume une subdivision en deux Parties est faite; la première Partie s'occupe des déterminants en général, la seconde de certaines catégories spéciales de déterminants (déterminants symétriques, jacobiens, hessiens, etc.). De cette manière le mathématicien qui s'intéresse plus particulièrement aux orthogonants, par exemple, n'aura pas besoin de parcourir tout le Volume pour rechercher ce qui a été fait dans le sujet de ses recherches. Il est bien évident que cette manière de procéder, si elle a des avantages, a aussi des inconvénients, ne serait-ce que celui d'écarteler les Mémoires les plus importants et de faire perdre de vue le lien qui fait un tout de leurs différentes parties. Bien entendu, chaque Volume se termine par une liste des noms d'auteurs cités, avec la nature des déterminants particuliers dont ils se sont occupés.

Dans la première Partie du premier Volume l'auteur s'est servi d'un système très ingénieux et très commode, qu'on regrette de ne pas voir utilisé dans la seconde Partie, pas plus que dans les autres Volumes, pour permettre au lecteur de suivre plus facilement l'histoire des différentes parties de la théorie. Les différents théorèmes, à mesure qu'ils se présentent historiquement, sont numérotés à l'aide des chiffres romains; de plus, chaque contribution nouvelle à un théorème déterminé est notée au moyen d'un chiffre arabe; par exemple, le théorème, dû à Vandermonde, relatif à la transposition de deux lignes, est noté XI; la démonstration que Laplace en a donnée est notée XI-2; celle de Cauchy est notée XI-3. Une Table placée à la fin du premier Volume indique les pages auxquelles il faut se reporter pour suivre l'histoire de chacun des LIX théorèmes, inégalement importants, signalés par l'auteur. De plus, dans le courant du Volume, deux Tableaux à double entrée indiquent les progrès réalisés, pour le premier de 1693 à 1812, pour le second de 1813 à 1841.

Avant de passer à l'analyse des différentes parties de l'Ouvrage, il reste à dire de quelle manière l'auteur a conçu la délimitation de son sujet. Il est évident qu'une grande partie des articles

et Mémoires cités ne traitent qu'incidemment des déterminants : ceux-ci n'y apparaissent que comme un instrument ; c'est là du reste l'origine d'une des principales difficultés que l'auteur a rencontrées pour n'oublier aucune contribution à l'histoire des déterminants, le titre d'un Mémoire ne lui donnant souvent aucune indication soit pour retenir ce Mémoire, soit pour le rejeter. L'auteur, et avec raison, ne rend compte que de la partie du Mémoire où il s'agit des déterminants, sans se préoccuper de l'objet véritable du Mémoire cité. La discrimination est quelquefois cependant difficile à faire, et elle est faite tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. C'est ainsi que l'auteur regarde le théorème sur la réalité des racines de l'équation en S comme faisant partie de la théorie des déterminants axisymétriques; en revanche, il laisse complètement de côté le calcul des matrices et les théorèmes qui s'y rapportent ; ceux-ci ne sont souvent au fond que des théorèmes relatifs à la multiplication des déterminants. On sait, par exemple, que si l'on désigne par $P(\lambda) = 0$ l'équation obtenue en annulant le déterminant qui se déduit d'un déterminant donné D en retranchant λ des éléments de la diagonale principale, la matrice M dont les éléments sont ceux de D satisfait à l'équation symbolique $P(M) = 0$: voilà un théorème qu'il est un peu paradoxal de considérer comme n'intéressant pas la théorie des déterminants.

La manière un peu étroite dont l'auteur a circonscrit son sujet a, dans certains cas, l'inconvénient de laisser presque complètement dans l'ombre des œuvres considérables, comme par exemple l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann ; quoique masqués par la concision des notations, les théorèmes de Grassmann, relatifs, par exemple, à la multiplication extérieure régressive, ne sont au fond que des théorèmes sur les déterminants. Il est vrai que la construction puissante de Grassmann n'a pas eu d'influence directe sur le développement de la théorie des déterminants, mais ce n'est pas une raison pour ne pas lui donner la place à laquelle elle a droit.

En revanche, le grand public mathématicien apprendra l'existence de noms absolument inconnus de lui, comme celui de Schweins, qui a fait faire en 1825 à la théorie des déterminants des progrès considérables qui étaient restés jusqu'à ces dernières années enfouis dans des livres absolument oubliés. Les critiques

précédentes n'enlèvent donc rien à l'intérêt que présente pour tous les mathématiciens l'œuvre considérable dont nous allons maintenant aborder l'analyse détaillée.

Premier Volume.

Première Partie : *Les déterminants généraux jusqu'en* 1841.
Deuxième Partie : *Les déterminants spéciaux jusqu'en* 1841.

Ce premier Volume est certainement le plus intéressant des trois parus jusqu'à présent. Il nous fait assister à la naissance et au développement de la théorie. L'idée fondamentale se présente à Cramer au milieu du XVIIIe siècle; elle se répand d'abord en France où Bézout, Vandermonde, Laplace, font faire à la théorie des progrès importants. Binet et Cauchy, simultanément en 1812, la portent à un point de développement qu'on pourrait presque regarder comme définitif. Dans les années qui suivent, la théorie se répand en Allemagne, où Scherk et Schweins, ce dernier surtout, lui apportent des contributions importantes; mais c'est principalement grâce à l'influence de Jacobi et à ses travaux échelonnés de 1827 à 1845 qu'elle acquiert droit de cité dans le public scientifique germanique. Les premiers travaux de Sylvester datent de la fin de cette première période (1839) qui se termine brillamment par une nouvelle exposition, complètement renouvelée, de la théorie par Cauchy, et par une exposition d'ensemble de Jacobi. Comme on le voit par ce bref exposé, la Science française a été dans ce domaine l'initiatrice. Cependant il est assez curieux de constater que Leibnitz avait eu avant Cramer l'idée fondamentale des déterminants, comme cela résulte d'une lettre, publiée seulement en 1850, adressée au marquis de l'Hôpital.

Chapitre I. — Le volume commence par un Chapitre d'Introduction (p. 1-5).

Chapitre II : *Les déterminants en général de* 1693 *à* 1779 (p. 6-52). — Les auteurs cités dans ce Chapitre sont Leibnitz, Fontaine, Cramer, Bézout, Vandermonde, Laplace et Lagrange, tous de langue française, y compris Leibnitz.

Dans une lettre écrite le 28 avril 1693 au marquis de l'Hôpital, Leibnitz explique par un exemple l'avantage qu'il peut y avoir à se

servir de nombres au lieu de lettres. Prenant le problème de l'élimination de deux inconnues entre trois équations du premier degré, il écrit ces équations sous la forme

$$10 + 11x + 12y = 0,$$
$$20 + 21x + 22y = 0,$$
$$30 + 31x + 32y = 0;$$

il élimine y entre la première et la deuxième, puis entre la première et la troisième de ces équations; il élimine enfin x entre les deux équations ainsi obtenues. Après avoir fait remarquer les « harmonies » qui se trouvent dans le résultat obtenu, il donne une règle générale pour former les termes de l'expression qui, égalée à zéro, fournit le résultat de l'élimination pour un nombre quelconque d'inconnues, et aussi une règle pour déterminer le signe de chacun de ces termes. Cette dernière règle, bien qu'exacte, est malheureusement peu pratique : elle attribue des signes différents à deux termes qui ont en commun autant de coefficients qu'il y a d'inconnues moins une. Leibnitz néglige de montrer comment on peut ainsi, et sans ambiguïté, déterminer le signe d'un terme quelconque quand on a fixé le signe d'un terme particulier.

Passons sur le Mémoire, peu important, de Fontaine, et arrivons au Mémoire fondamental de Cramer. C'est dans un traité intitulé : « Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques » publié à Genève en 1750 que se trouve, à l'occasion du problème de la détermination d'une courbe d'ordre n passant par $\frac{n(n+3)}{2}$ points donnés, la méthode devenue classique de résolution d'un système d'équations du premier degré à autant d'inconnues que d'équations. Grâce au caractère mixte de notation des coefficients de ces équations, qu'il écrit

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \ldots,$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Cramer arrive à des règles plus simples que celles de Leibnitz. Le dénominateur commun de chacune des inconnues « contient autant de termes qu'il y a d'arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettres Z, Y, X, V, ..., toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on distribue, comme

exposants, les n premiers chiffres en toutes les manières possibles. On donne à ces termes les signes $+$ ou $-$ selon la règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un *dérangement*. Que l'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements; s'il est pair ou nul, le terme aura le signe $+$; s'il est impair, le terme aura le signe $-$ ». Quant aux numérateurs, ils se déduisent du dénominateur commun en remplaçant les coefficients de l'inconnue cherchée par les A correspondants.

Ajoutons que le but final des recherches de Cramer était, comme pour Leibnitz, l'élimination de n inconnues entre $n+1$ équations du premier degré; mais il n'a pas remarqué que l'expression qui, égalée à zéro, fournit le résultat de cette élimination, est de la même espèce que le dénominateur commun dont il avait si nettement indiqué la loi de formation.

La règle de Cramer s'imposa presque immédiatement dans l'enseignement et, si l'on en croit un propos attribué à Gergonne, « cette méthode était tellement en faveur que les examens aux écoles des services publics ne roulaient, pour ainsi dire, que sur elle; on était admis ou rejeté suivant qu'on la possédait bien ou mal ».

Dans un Mémoire publié en 1764 dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Bézout, en se référant à la règle de Cramer, la modifie de manière à simplifier la détermination des signes. En fait, il énonce une loi de récurrence pour la formation des termes en passant successivement du cas de deux inconnues à celui de trois, puis à celui de quatre, et ainsi de suite; mais ce qui distingue sa règle de celles de Leibnitz et de Cramer, c'est que le signe de chaque terme est déterminé par la formation même du terme, et non pas après coup.

C'est Vandermonde, dans son *Mémoire sur l'élimination* publié en 1772 dans l'*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, qui le premier donne une exposition cohérente de la théorie, définissant en elles-mêmes et indépendamment de leurs applications, les fonctions que nous appelons maintenant *déterminants*, et étudiant logiquement leurs propriétés. Il introduit pour ces fonctions une notation simple, telle que $\frac{1|2|3}{1|2|3}$, chacun des éléments étant noté $\frac{\alpha}{a}$ (d'une manière presque identique à celle

de Leibnitz); il énonce une loi de formation récurrente identique au fond à celle de Bézout, en laissant dans un ordre fixe soit les indices supérieurs, soit les indices inférieurs; il démontre que la permutation de deux indices consécutifs d'une même série change le signe de la fonction; il énonce sans démonstration le théorème que l'égalité de deux indices de la même série annule la fonction, et enfin il indique déjà le développement d'un déterminant suivant les mineurs de deux lignes. Vandermonde applique la théorie à la résolution d'un système d'équations linéaires en partant de la remarque qu'un déterminant qui a deux lignes identiques est nul.

Laplace, dans un Mémoire paru en 1772 dans le même recueil que celui de Vandermonde, reprend à son tour la question de l'élimination de n inconnue entre $n+1$ équations linéaires. Il donne le premier un nom, celui de *résultante*, aux expressions considérées par Cramer, Bézout et Vandermonde; il appelle *variation* ce que Cramer appelait *dérangement*; il introduit une notation simple pour ses résultantes, telle que $({}^1a^2b^3c)$; il démontre rigoureusement le théorème de Vandermonde sur l'effet produit par la transposition de deux indices. La contribution la plus importante apportée par Laplace est la règle connue par son nom qui permet d'exprimer une résultante comme un agrégat de termes dont chacun est le produit d'autres résultantes. La manière dont il arrive à la solution d'un système d'équations linéaires est celle qui est restée en usage dans l'enseignement.

Suit l'analyse de trois Mémoires parus en 1773 où Lagrange, sans se préoccuper le moins du monde, comme les auteurs précédents, du problème de l'élimination, est conduit à un certain nombre d'identités algébriques qu'on peut maintenant regarder comme exprimant des théorèmes sur les déterminants, plus particulièrement sur la multiplication des déterminants. Contentons-nous de citer l'identité

$$\begin{aligned}
&(xy'z''+yz'x''+zx'y''-xz'y''-yx'z''-zy'x'')^2\\
&\quad=(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)\\
&\qquad+2(xx'+yy'+zz')(xx''+yy''+zz'')(x'x''+y'y''+z'z'')\\
&\qquad-(x^2+y^2+z^2)(x'x''+y'y''+z'z'')^2\\
&\qquad-(x'^2+y'^2+z'^2)(xx''+yy''+zz'')^2\\
&\qquad-(x''^2+y''^2+z''^2)(xx'+yy'+zz')^2,
\end{aligned}$$

qui exprime au fond le développement du carré d'un déterminant.

Bézout, dans sa *Théorie générale des équations algébriques* parue en 1779, revient sur la question de l'élimination, avec la préoccupation d'éviter, dans le cas des équations à coefficients *numériques*, la formation compliquée de formules s'appliquant aux équations ayant tout le degré de généralité possible. La règle qu'il donne vaut la peine d'être transcrite littéralement :

« Soient u, x, y, z, ... des inconnues dont le nombre soit n, ainsi que celui des équations.

» Soient a, b, c, d, ... les coefficients respectifs de ces inconnues dans la première équation.

» a', b', c', d', ... les coefficients des mêmes inconnues dans la seconde équation, et ainsi de suite.

» Supposez tacitement que le terme tout connu de chaque équation soit affecté aussi d'une inconnue que je représente par t.

» Formez le produit $uxyzt$ de toutes ces inconnues écrites dans tel ordre que vous voudrez d'abord ; mais cet ordre une fois admis, conservez-le jusqu'à la fin de l'opération.

» Échangez successivement chaque inconnue contre son coefficient dans la première équation, en observant de changer le signe à chaque échange pair : ce résultat sera ce que j'appelle une *première ligne*.

» Échangez dans cette *première ligne* chaque inconnue contre son coefficient dans la seconde équation en observant, comme ci-devant, de changer le signe à chaque échange pair; et vous aurez une *seconde ligne*.

» Échangez dans cette *seconde ligne* chaque inconnue contre son coefficient dans la troisième équation, en observant de changer le signe à chaque échange pair ; et vous aurez une *troisième ligne*.

» Continuez de la même manière jusqu'à la dernière équation inclusivement; et la dernière *ligne* que vous obtiendrez vous donnera les valeurs des inconnues de la manière suivante.

» Chaque inconnue aura pour valeur une fraction dont le numérateur sera le coefficient de cette même inconnue dans la dernière ou $n^{\text{ième}}$ *ligne*, et qui aura constamment pour dénominateur le coefficient que l'inconnue introduite t se trouvera avoir dans cette même $n^{\text{ième}}$ *ligne*. »

L'application convenablement dirigée de cette règle, énoncée du reste sans aucune justification, conduit Bézout à de nouveaux procédés pour obtenir des développements de Laplace, spécialement quand les coefficients ont des valeurs numériques.

Enfin, en partant de la remarque simple qu'un système de n équations linéaires et homogènes, dont deux sont identiques, est toujours compatible, Bézout arrive à la formation d'identités dont les unes reviennent à celle obtenue par Vandermonde en écrivant

qu'un déterminant à deux lignes identiques est nul, mais dont d'autres, plus cachées, concernent des agrégats de produits de déterminants.

Chapitre III : *Déterminants en général de* 1784 *à* 1812 (p. 53-79). — La période dont il s'agit maintenant est loin d'avoir l'importance de la précédente.

Signalons l'apparition du mot *déterminant* dans les *Disquisitiones Arithmeticæ* de Gauss parues en 1801. A la vérité, ce mot y a un sens un peu spécial : il désigne ce qu'on appelle maintenant le discriminant d'une forme quadratique binaire ou ternaire. A propos des formes ternaires, Gauss définit les formes adjointes qui le conduisent à des identités déjà obtenues par Lagrange. Le théorème sur le déterminant de la forme transformée d'une forme donnée par une substitution linéaire donnée y est aussi indiqué, de sorte que Gauss n'était pas fort éloigné du théorème de la multiplication des déterminants.

Dans son *Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps*, paru en mai 1811 dans le *Journal de l'École Polytechnique*, et dans un autre Mémoire, paru en novembre de la même année, Binet donne de l'identité de Lagrange signalée plus haut une généralisation importante qui, dans nos conceptions actuelles, fournit l'expression du carré d'une matrice et qui sera la source, l'année suivante, de nouveaux développements très importants.

Chapitre IV : *Déterminants en général en* 1812 (p. 80-131). — Ce Chapitre est consacré uniquement à deux Mémoires, l'un de Binet, l'autre de Cauchy, ce dernier d'une importance exceptionnelle.

Celui de Binet a pour titre : *Mémoire sur un système de formules analytiques et leur application à des considérations géométriques;* il a paru en novembre 1812 dans le *Journal de l'École Polytechnique*. C'est là que le théorème général de la multiplication des déterminants, ou plutôt des *résultantes*, car Binet utilise la dénomination de Laplace, est énoncé nettement avec toutes ses extensions, bien que la démonstration en soit laborieuse et peu satisfaisante. Le théorème initial est celui qui met sous la forme d'une résultante la somme des produits des résultantes

obtenues en considérant deux tableaux rectangulaires à n lignes et $r \geqq n$ colonnes et en prenant de toutes les manières possibles dans le premier tableau n colonnes quelconques et dans le second tableau les n colonnes correspondantes. Les théorèmes suivants représentent par une somme de résultantes certaines sommes de produits de sommes de résultantes; ils sont d'une extrême généralité.

Le Mémoire de Cauchy, dont le titre : *Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, dit suffisamment l'objet, a paru également dans le *Journal de l'École Polytechnique*; il fut lu à l'Institut le même jour que le Mémoire de Binet. Cauchy, élevant la question, considère les *déterminants*, dont il emprunte le nom à Gauss, comme des cas particuliers d'expressions beaucoup plus générales, qu'il appelle *fonctions symétriques alternées*, fonctions dont il fait une étude préliminaire. On peut dire que tout ce qui est enseigné encore aujourd'hui dans les cours de mathématiques spéciales procède du Mémoire de Cauchy; l'élégance de l'exposition, la simplicité et la rigueur des raisonnements suscitent d'autant plus d'admiration qu'on a eu plus de peine à suivre les essais lourds de démonstrations presque toujours peu convaincantes des auteurs précédents. Une seule chose manque au Mémoire de Cauchy pour faire des déterminants l'outil incomparable qu'il est devenu plus tard, c'est une notation susceptible de convenir au cas où les éléments sont *numériques;* la notation $S(\pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn})$ et la notation (a_{1n}) usitées par Cauchy désignent un effet des *fonctions* de n^2 quantités arbitraires et ne sont maniables presque exclusivement que dans ce cas-là. Hâtons-nous d'ajouter que Cauchy en a tiré tout le parti possible; en dehors des théorèmes sur le produit des déterminants, sur les déterminants adjoints, sur les développements de Laplace, Cauchy a étudié en détail les déterminants dont les éléments sont les mineurs d'un certain ordre d'un déterminant donné, généralisant dans une autre direction que celle de Binet le théorème de la multiplication.

Chapitre V. — Ce Chapitre contient, en deux pages, une vue rétrospective sur l'histoire des déterminants jusqu'en 1812 (p. 132-133).

Chapitre VI : *Déterminants en général de* 1813 *à* 1825 (p. 134-175). — De ce Chapitre retenons, à titre de curiosité, le renseignement que c'est à Gergonne (1813) qu'est due l'introduction du mot *inversion* à la place du mot *dérangement* utilisé par Cramer, et aussi la démonstration, aujourd'hui classique, que la transposition de deux lettres d'une permutation change la parité du nombre des inversions. Le Mémoire le plus original est celui de Schweins (*Theorie der Producte mit Versetzungen*), qui fait partie d'un Ouvrage intitulé : *Theorie der Differenzen und Differentiale, u. s. w.*, paru en 1825. Cet auteur semble ignorer le Mémoire de Cauchy. Il se sert d'une notation spéciale, analogue à celle de Laplace, à savoir

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix} \right\|.$$

Il est à remarquer du reste que dans cette période chaque auteur avait sa notation propre, aucune ne s'étant imposée universellement. L'auteur part de la théorie des développements de Laplace pour arriver à des identités très générales entre des sommes de produits de déterminants. On aura une idée de ces identités par la suivante :

$$\begin{aligned} &\Sigma(-)^{\star}\left\| \begin{matrix} a_1 & & & a_n \\ A_1 & \dots & A_{n-q} & B'_1 \dots B'_q \end{matrix} \right\| . \left\| \begin{matrix} b_1 & & & b_{m-q} \\ B'_{q+1} & \dots & \dots & B'_m \end{matrix} \right\| \\ &= \Sigma(-)^{\star}\left\| \begin{matrix} a'_1 & & & a'_{n-q} \\ A_1 & \dots & \dots & A_{n-q} \end{matrix} \right\| . \left\| \begin{matrix} a'_{n-q+1} \dots a'_n b_1 \dots b_{m-q} \\ B_1 \dots \dots \dots \dots B_m \end{matrix} \right\| ; \end{aligned}$$

dans le premier membre, on prend toutes les combinaisons possibles des m lettres $B_1, \dots, B_m$; dans le second membre, toutes les combinaisons possibles des n indices $a_1, a_2, \dots, a_n$; le premier membre comporte $\frac{m!}{q!(m-q)!}$ termes et le second $\frac{n!}{q!(n-q)!}$.

Chapitre VII : *Déterminants en général de* 1827 *à* 1835 (p. 176-214). — C'est dans cette nouvelle période qu'apparaît pour la première fois le nom de Jacobi. Dans plusieurs Mémoires insérés dans le *Journal de Crelle* et s'échelonnant de 1827 à 1834, l'illustre géomètre, sans faire une étude méthodique des déterminants, a l'occasion de s'en servir dans des conditions très variées. Il découvre par un procédé assez intéressant un théorème, déjà implicitement démontré dans un cas particulier par Lagrange, mais qui était resté inconnu de Cauchy, sur l'expression d'un

mineur quelconque du déterminant adjoint d'un déterminant donné Δ comme produit d'une puissance de Δ par un certain mineur de Δ. Jacobi arrive à ce théorème par des développements en séries de fonctions rationnelles de plusieurs variables.

Chapitre VIII : *Déterminants en général de* 1836 *à* 1840 (p. 215-246). — Cette fois c'est le nom de Sylvester qui apparaît pour la première fois avec trois Mémoires sur l'élimination parus en 1839, 1840 et 1841. Dans le premier Mémoire, l'illustre mathématicien anglais découvre les déterminants, dont il ignorait l'existence, et il les découvre sous une forme presque identique à l'une de celles données par Cauchy dans son grand Mémoire de 1812 ; il part de ce qu'il appelle le *produit zéta-ique*

$$\zeta abc\ldots kl(b-a)(c-a)\ldots(l-a)\ldots(l-k),$$

où la multiplication indiquée à la droite du signe ζ est effectuée suivant les règles ordinaires, mais où les exposants sont ensuite remplacés par des indices. C'est dans le second Mémoire que se trouve la formule classique d'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières de degrés n et m, au moyen d'un déterminant de degré $m+n$, formule que Cauchy démontre rigoureusement la même année (1840). En 1841, Sylvester fait usage à son tour du mot de *déterminant*.

Notons en passant un curieux lapsus de Catalan qui, dans un Mémoire de 1839, énonce et démontre par un exemple (!) le théorème que dans un déterminant deux termes, qui peuvent se déduire l'un de l'autre par une permutation tournante des indices, ont même signe.

Chapitre IX : *Déterminants en général en* 1841 (p. 247-285). — L'année 1841 fait en quelque sorte pendant à l'année 1812, étant remplie par des Mémoires importants de deux auteurs illustres, Cauchy et Jacobi. Ce dernier, dans un Mémoire intitulé : *De formatione et proprietatibus Determinantium* et inséré dans le Tome XXII du *Journal de Crelle*, donne de la théorie des déterminants une exposition d'ensemble inspirée en grande partie du Mémoire de Cauchy en 1812. C'est ainsi que les permutations $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des indices $0, 1, \ldots, n$ sont classées, suivant le signe du produit $(a_1-a_0)(a_2-a_0)\ldots(a_n-a_{n-1})$, en permu-

tations *positives* et permutations *négatives*. Jacobi démontre rigoureusement que les permutations positives sont celles qui comportent un nombre pair d'inversions (point de vue de Cramer), ou encore qui se déduisent de la permutation $01 \ldots n$ par une substitution qui, décomposée en *substitutions circulaires*, comporte un nombre pair de substitutions circulaires d'un nombre pair de lettres (point de vue de Cauchy de 1812). Le Mémoire de Jacobi comporte plusieurs parties dont les dernières seront retrouvées plus loin à l'occasion des déterminants fonctionnels. Remarquons le fait curieux que Jacobi est le premier à énoncer explicitement le théorème qu'un déterminant ne change pas si l'on ajoute aux éléments d'une ligne les éléments d'une autre ligne multipliés par un même facteur.

Ce qu'il y a de plus curieux dans les Mémoires de Cauchy de l'année 1841, c'est qu'il renonce à la dénomination de *déterminant* pour adopter soit l'expression vague de *fonction alternée*, soit l'expression due à Laplace de *résultante*. Dans une première Note des *Comptes rendus* de mars 1841, il partage les différents termes d'un déterminant en groupes de termes *semblables*, dont l'énumération le conduit à des théorèmes d'arithmétique intéressants : il retrouve de cette manière le théorème de Wilson sur les nombres premiers. Les autres mémoires sont loin d'avoir l'importance de celui de 1812.

Chapitre X : Ce Chapitre contient une courte vue rétrospective de la période 1813-1840 (p. 286-288).

La seconde Partie du Volume s'ouvre par le Chapitre XI.

Chapitre XI : *Déterminants axisymétriques de* 1773 *à* 1841 (p. 289-305). — L'auteur appelle *déterminant axisymétrique* un déterminant dont les éléments sont symétriques par rapport à la diagonale principale. Signalons seulement un Mémoire de Cauchy (1829) sur l'équation en S; on y trouve le lemme classique d'après lequel, si S est un déterminant axisymétrique, R le mineur relatif à la première ligne et la première colonne, Y le déterminant obtenu en enlevant la première ligne et la seconde colonne de S, et Q le déterminant qui se déduit de R comme R se déduit de S, l'égalité $R = O$ entraîne $SQ = -Y^2$.

Chapitre XII : *Alternants de* 1771 *à* 1841 (p. 306-345). — On appelle *alternant* un déterminant dont chaque ligne est formée des mêmes puissances de n lettres données $a, b, \ldots, l$; l'exemple le plus simple d'un alternant est le déterminant connu sous le nom de Vandermonde. En réalité, la théorie des alternants est une création de Cauchy qui, dans son grand Mémoire de 1812, démontre déjà que tout alternant est le produit du déterminant de Vandermonde par une fonction symétrique entière de $a, b, \ldots, l$. En dehors des recherches importantes de Schweins (1825) sur ce sujet, signalons un Mémoire de Sylvester (1839) et surtout de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 22 (1841). Dans ce Mémoire, dont il a déjà été question au Chapitre IX, on ramène le calcul des alternants à des développements en série; par exemple, l'expression

$$\sum \frac{a_0^0 a_1^1 \ldots a_{n-m-1}^{n-m-1} a_{n-m}^{\gamma} a_{n-m+1}^{\gamma_1} \ldots a_n^{\gamma_m}}{(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)\ldots(a_n - a_{n-1})}$$

est égale au coefficient de

$$t_0^{-(\gamma+1)} t_1^{-(\gamma_1+1)} \ldots t_m^{-(\gamma_m+1)}$$

dans le développement de

$$\frac{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)\ldots(t_{n-1} - t_n)}{f(t_0) f(t_1)\ldots f(t_m)}$$

suivant les puissances décroissantes de $t_0, t_1, \ldots, t_m$, où l'on a posé

$$f(x) = (x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_n).$$

Quant à ce développement lui-même, il fait intervenir les sommes des puissances semblables des racines de $f(x)$; le résultat final est un déterminant formé avec ces sommes.

A ce Mémoire de Jacobi correspond sur le même sujet un Mémoire de Cauchy remarquable par l'élégance des démonstrations et des résultats.

Chapitre XIII : *Jacobiens de* 1815 *à* 1841 (p. 346-394). — Le premier exemple d'un *jacobien* ou d'un *déterminant fonctionnel* se trouve dans un Mémoire de Cauchy (1815) sur la « Propagation des ondes ». Mais, comme il fallait s'y attendre, le Chapitre est presque uniquement rempli par des Mémoires de Jacobi, surtout

son grand Mémoire, déjà deux fois mentionné, de 1841. La théorie complète et les propriétés des déterminants fonctionnels y sont exposées magistralement; toutes ces propriétés sont trop classiques pour qu'il y ait lieu d'y insister.

Chapitre XIV : *Déterminants gauches de* 1827 *à* 1845 (p. 395-406). — Les déterminants *gauches* sont ceux dont les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux et de signes contraires, les éléments de la diagonale principale étant eux-mêmes quelconques : s'ils sont nuls, le déterminant est dit *symétrique gauche*. Aux déterminants symétriques gauches, il y a lieu d'associer les expressions appelées actuellement *pfaffiens* et qui interviennent pour la première fois dans un Mémoire de Pfaff (1815) consacré à l'intégration des équations aux différentielles totales. Dans un Mémoire de 1827 consacré à la méthode de Pfaff, Jacobi démontre pour la première fois qu'un déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul; il résout en outre, sans indication de méthode, les équations linéaires pour lesquelles le déterminant des coefficients des inconnues est symétrique gauche d'ordre pair, et il indique la loi de formation des expressions (pfaffiens) qui s'introduisent dans la solution. Un théorème fondamental est indiqué dans le Mémoire célèbre de Jacobi sur le dernier multiplicateur (1845).

Chapitre XV : *Orthogonants de* 1827 *à* 1841 (p. 407-471). — *Les orthogonants* ont leur origine dans le problème du changement de coordonnées rectangulaires. L'auteur donne une assez longue liste remontant à Euler (1748) d'articles ayant rapport à ce problème. Les Mémoires spécialement analysés dans le Chapitre sont presque exclusivement, cette fois encore, de Cauchy et de Jacobi. C'est dans un Mémoire de Jacobi de 1827 qu'on trouve pour la première fois, par une analyse assez longue, la détermination des axes d'une quadrique à centre définie par son équation en coordonnées cartésiennes. Cauchy, dans un Mémoire de 1829 « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes », étudie les propriétés de l'équation en S, démontre leur réalité, effectue leur séparation d'après une méthode qui a passé dans l'enseignement, et enfin démontre la possibilité de réduire, par une substitution linéaire laissant inva-

riante la somme des carrés des variables, toute forme quadratique en une somme de carrés, résolvant ainsi complètement un problème qui avait été attaqué par Jacobi dans les cas particuliers de trois et de quatre variables.

Dans un Mémoire de 1831, Jacobi généralise, dans une autre direction que Cauchy, les résultats qu'il avait précédemment obtenus en étudiant la réduction d'une forme bilinéaire par des substitutions orthogonales effectuées sur les deux séries de variables. Enfin, dans un Mémoire de 1833, il reprend le problème général traité par Cauchy en 1829; il démontre en particulier que si la forme quadratique $\Sigma a_{k\lambda} x_k x_\lambda$ est changée, par une substitution orthogonale, dans la forme $\Sigma G_i y_i^2$, la forme

$$\sum_{\lambda} (a_{1\lambda} x_1 + a_{2\lambda} x_2 + \ldots + a_{n\lambda} x_n)^2$$

est changée dans la forme $\Sigma G_i^2 y_i^2$ et, ce qui est le plus important, que toute relation entre les y et les x reste vraie si y_i est remplacée par $G_i y_i$ et x_r par $a_{1r} x_1 + a_{2r} x_r + \ldots + a_{nr} x_n$.

Chapitre XVI : *Formes spéciales diverses de* 1811 *à* 1841 (p. 472-487). — Ce Chapitre est consacré en grande partie à Wronski, à sa « loi générale des séries » et à sa « loi suprême ». Dans sa « Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange » (1812), il avait introduit des *sommes combinatoires* (fonctions *sin*) qui sont au fond des déterminants dont les éléments sont des différences de fonctions, et c'est au moyen de ces fonctions *sin* qu'il développe une fonction arbitraire suivant les facultés progressives d'une fonction génératrice. Schweins, dans son Mémoire de 1825, qui avait été perdu de vue jusqu'en 1884, avait été le seul à comprendre et poursuivre l'œuvre de Wronski.

Chapitre XVII. — Enfin le Volume se termine par un Chapitre d'une demi-page contenant une vue rétrospective de l'histoire des formes spéciales de déterminants de 1772 à 1841.

Volume II : *The Period* 1840 *to* 1860.

Le second Volume de l'Ouvrage de M. Muir se rapporte à la période qui s'écoule de 1841 à 1860. Comme le premier, il passe

en revue, par ordre chronologique, les articles et mémoires se rapportant, d'une part aux déterminants en général, d'autre part aux différentes catégories de déterminants particuliers.

Comme le fait remarquer l'auteur, cette période peut être qualifiée d'*anglaise*, les travaux de Cayley et de Sylvester y jouant un rôle prédominant, alors que la période héroïque de 1693 à 1812 était presque exclusivement *française* et la période de 1813 à 1841 plutôt *germanique*. Néanmoins, dans cette nouvelle période anglaise, les géomètres tant français qu'allemands continuent à apporter d'importantes contributions à la théorie, les géomètres italiens inaugurant de leur côté une contribution qui n'a pas été sans valeur.

Chapitre I. — Ce Chapitre, de trois pages seulement, est consacré à deux Mémoires sans grande importance antérieurs à 1841 (p. 1-3).

Chapitre II : *Déterminants en général, de* 1841 *à* 1860 (p. 4-108). — Le Chapitre débute par l'analyse d'un court article de Cayley paru en 1841 dans le *Cambridge Math. Journ.*, et qui fait date dans l'histoire des déterminants. C'est en effet là qu'est introduite la notation, devenue classique, d'un déterminant sous la forme de tableau carré placé entre deux lignes verticales, notation qui permettait désormais de représenter un déterminant formé de n'importe quels éléments littéraux ou numériques, et devait rendre possibles les futurs développements de la théorie. D'autre part, dans ce même article, Cayley montre sa maîtrise dans le maniement de l'outil qu'il vient de forger en appliquant le théorème de la multiplication des déterminants, qu'il redécouvre par lui-même, à l'établissement, sous la forme d'un déterminant égalé à zéro, de la relation qui existe entre les distances mutuelles de cinq points quelconques de l'espace. La même maîtrise se remarque dans un autre article de trois pages paru en 1843 dans le même journal, et consacré à la démonstration du théorème de Pascal.

La notation due à Cayley est étendue par lui aux tableaux rectangulaires de q lignes et $n > q$ colonnes; un tel tableau placé entre deux doubles barres verticales désigne l'ensemble des déterminants à q lignes et q colonnes formés au moyen des éléments

de ce tableau. Le nom de *matrice* pour désigner un tel tableau rectangulaire est dû à Sylvester dans un article du *Philos. Magazine* de 1850 : c'est dans ce même article qu'apparaît pour la première fois l'expression *mineur* d'un déterminant.

On doit à Sylvester (*Philos. Magazine* de 1850) une notation différente de celle de Cayley, mais qui ne s'applique, comme les notations antérieures, qu'à des déterminants à éléments indéterminés ; elle consiste à représenter chaque élément comme un produit symbolique de deux lettres ou *ombres* (umbræ) correspondant respectivement à la ligne et à la colonne auxquelles appartient l'élément ; on écrit alors simplement sur deux rangs les symboles des lignes et ceux des colonnes placés entre crochets, de manière à avoir l'identité de définition

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{matrix}\right\} = \sum \pm \left\{ a_1 \alpha_{\theta_1} \times a_1 \alpha_{\theta_2} \times \dots \times a_n \alpha_{\theta_n} \right\}.$$

Cette notation est étendue par Sylvester aux « déterminants composés », le symbole

$$\left\{\begin{matrix} \overline{ab} & \overline{cd} \\ \alpha\beta & \gamma\delta \end{matrix}\right\}$$

désignant par exemple l'expression

$$\left\{\begin{matrix} ab \\ \alpha\beta \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} cd \\ \gamma\delta \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} ab \\ \gamma\delta \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} cd \\ \alpha\beta \end{matrix}\right\}$$

formée au moyen de quatre déterminants à deux lignes et deux colonnes. Cette notation permet à Sylvester d'exprimer sous une forme condensée relativement simple des théorèmes très généraux.

On doit à Cayley et Sylvester des généralisations importantes des déterminants par l'introduction des notions d'*hyperdéterminants* et de *permutants*. La théorie des *permutants* (le nom est dû à Sylvester) est développée par Cayley dans un Mémoire de 1851 inséré dans le *Cambridge and Dublin Math. Journ.* ; l'illustre géomètre avait déjà considéré, dans un Mémoire de 1843, des fonctions désignées par la notation

$$\left\{\begin{matrix} \Lambda_{\rho_1 \sigma_1 \tau_1 \dots} \\ \rho_2 \sigma_2 \tau_2 \dots \\ \dots\dots\dots \\ \rho_n \sigma_n \tau_n \dots \end{matrix}\right\};$$

une telle fonction était la somme de tous les termes de la forme

$$\pm_r \pm_s \pm_t \ldots \Lambda_{\rho_{r_1}\sigma_{s_1}\tau_{t_1}\ldots} \times \ldots \times \Lambda_{\rho_{r_n}\sigma_{s_n}\tau_{t_n}\ldots},$$

où

$$r_1 r_2 \ldots r_n, \quad s_1 s_2 \ldots s_n, \quad t_1 t_2 \ldots t_n, \quad \ldots$$

désignent des permutations quelconques des indices $1, 2, \ldots, n$, où $\pm_r$ désigne $+1$ ou -1 suivant que la permutation $r_1 r_2 \ldots r_n$ est paire ou impaire, et où enfin $\Lambda_{\rho_r \sigma_s \tau_t \ldots}$ désignent les n^p éléments de la fonction, si p est le nombre des colonnes du tableau qui figure dans la notation ci-dessus. Ce nombre p doit du reste être pair pour que la fonction ne soit pas identiquement nulle. On retrouve les déterminants ordinaires en prenant $p = 2$.

Dans son Mémoire de 1851, les fonctions plus générales que Cayley appelle *permutants* sont des sommes de termes dont chacun est défini (suivant une loi quelconque) par différentes séries d'indices, les indices de chaque série se permutant entre eux de toutes les manières possibles et chaque terme étant précédé d'un signe approprié. Les *pfaffiens* sont par exemple des *permutants simples*, c'est-à-dire formés avec une seule série d'indices en nombre pair, tels que

$$(\Lambda_{1234}) = P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14}P_{23},$$

où $P_{12} = -P_{21}$, $P_{13} = -P_{31}, \ldots$ sont les *éléments* du permutant.

Les *commutants* et les *intermutants* sont des cas particuliers des permutants.

Dans un Mémoire de 1852, inséré dans le *Cambridge and Dublin Math. Journal*, Sylvester montre comment la théorie des permutants permet de représenter symboliquement les invariants et covariants des formes algébriques.

Laissons de côté les autres contributions des deux géomètres anglais à la théorie des déterminants, telles que les différentes représentations dues à Sylvester (*Philos. Magazine*, 1852), du produit de deux déterminants et le théorème dû au même (*Philos. Magazine*, 1850) relatif au nombre des équations indépendantes obtenues en annulant tous les mineurs d'ordre p d'une matrice donnée.

C'est dans la période qui nous occupe (juin 1844) qu'a paru le

célèbre Ouvrage de Grassmann : *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*. La multiplication *extérieure* lui sert à résoudre d'une manière particulièrement simple un système de n équations linéaires à n inconnues, en regardant les coefficients des inconnues dans les différentes équations comme des quantités d'espèces différentes suivant l'équation dans laquelle ils figurent. Les numérateurs et le dénominateur commun des inconnues sont alors des produits extérieurs de n facteurs dont chacun est la somme (symbolique) des coefficients d'une même inconnue ou des termes tout connus. Le raisonnement de Grassmann, très condensé, ne semble pas avoir convaincu M. Muir; mais au fond, s'il n'est pas rigoureux, il s'en faut de bien peu, et il est curieux que le même raisonnement se retrouve identique, mais sous une forme peut-être plus facile à comprendre, dans une Note de de Saint-Venant aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (1853); l'auteur, qui ne connaissait certainement pas Grassmann, y donnait une interprétation géométrique des « clefs algébriques » de Cauchy. L'éminent géomètre français, dans un Mémoire paru en 1847 dans les *Exercices d'Analyse et de Phys. Math.*, et qui se meut dans un ordre d'idées très voisin de celui de Grassmann, introduisait en effet des symboles, appelés *clefs algébriques*, qui lui permettaient de représenter un déterminant comme un produit symbolique de ses différentes lignes : c'est ainsi que le déterminant $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ peut être mis sous la forme

$$(a_1\alpha + b_1\beta)(a_2\alpha + b_2\beta)$$

si l'on convient d'introduire deux *clefs* α, β soumises aux lois de multiplication

$$\alpha^2 = 0, \qquad \alpha\beta = -\beta\alpha = 1, \qquad \beta^2 = 0.$$

Cauchy présentait ainsi, sous une forme peut-être plus accessible aux mathématiciens, et qui sera au fond celle de Grassmann dans son *Ausdehnungslehre* de 1862, la *multiplication extérieure* du géomètre allemand.

Tous les élèves de nos classes de mathématiques spéciales connaissent la « règle de Sarrus ». C'est dans un Ouvrage de Finck, paru à Strasbourg en 1846 et intitulé : *Éléments d'Algèbre*, que cette règle est indiquée pour la première fois et attribuée à Sarrus,

professeur au lycée de Strasbourg. Un Traité récent sur les déterminants (celui de Weichold) fait remonter la découverte de cette règle à l'année 1833, mais c'est une simple conjecture, et l'on a des raisons de penser du reste que Sarrus lui-même aurait tenu sa propre règle de ses élèves qui l'avaient apprise de son prédécesseur dans sa chaire. C'est un des petits problèmes de curiosité que soulève l'histoire des déterminants.

Signalons enfin dans cette période de 1841 à 1850 l'apparition des premiers Traités sur les déterminants. C'est d'abord un petit Traité de VIII + 63 pages paru à Londres en 1851 sous le titre : *Elementary Theorems relating to Determinants*, par W. Spottiswoode, réédité en 1853 dans le *Journal de Crelle*. C'est ensuite le Traité de F. Brioschi, paru à Pavie en 1854 et intitulé : *La Teorica dei Determinanti, e le sue principali applicazioni;* ce Traité fut traduit en français par Combescure en 1856, et en allemand par Schellbach en 1856. On peut signaler ensuite, de G. Bellavitis, une *Sposizione elementare della teorica dei determinanti* parue en 1857 dans les *Memorie dell'Istituto Veneto*, dans laquelle apparaît pour la première fois la notation, devenue classique $|a_1 b_2 c_3 \ldots|$, pour désigner un déterminant par les éléments de sa diagonale principale, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre. Enfin, en 1857, paraît le Traité de R. Baltzer, intitulé : *Theorie und Anwendung der Determinanten*, Traité traduit en français en 1861 par J. Houël. On remarquera qu'aucun de ces Ouvrages n'est français.

Chapitre III : *Déterminants axisymétriques, de* 1841 *à* 1860 (p. 109-153). — Un grand nombre des articles relatés dans ce Chapitre sont inspirés de l'article de Cayley relatif à la relation qui existe entre les distances mutuelles de cinq points quelconques de l'espace. Sylvester et Cayley y montrent leur virtuosité dans le maniement des déterminants; signalons en particulier une Note de Cayley parue en 1852 dans le *Cambridge and Dublin Math. Journal*, où il met sous forme de déterminant le premier membre de l'équation *rationnelle* entière équivalente à l'une des équations irrationnelles

$$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}} + \ldots = 0,$$

$$a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}} + \ldots = 0.$$

Chapitre IV : *Alternants, de* 1832 *à* 1860 (p. 154-190). — Dans un court article paru en 1837 dans le *Journal de Liouville*, Binet fait remarquer qu'il avait déjà en 1811 obtenu des résultats rès généraux admettant comme cas particuliers ceux que Lamé venait de publier relativement aux quadriques homofocales.

Signalons la première apparition, dans un article de Borchardt, paru en 1845 dans le *Journal de Crelle*, de l'expression du carré du produit des différences des racines d'une équation de degré n, sous la forme d'un déterminant construit au moyen des sommes des puissances semblables des racines. Dans son Traité classique de 1857, Baltzer transforme ce déterminant de degré n en un autre de degré $2n-2$ et, par des combinaisons de colonnes, arrive à l'expression au moyen des coefficients de l'équation.

Signalons enfin deux articles, l'un de Cayley en 1846 dans le *Journal de Liouville*, l'autre de Joachimsthal en 1854 dans le *Journal de Crelle*, sur certains polynomes qui peuvent jouer le rôle des polynomes de Sturm et dont les coefficients sont exprimés d'une manière très élégante sous forme de déterminants construits avec les sommes des puissances semblables des racines.

Chapitre V : *Déterminants composés, jusqu'en* 1860 (p. 191-209). — Le premier *déterminant composé* ou *déterminant de déterminants* avait été virtuellement considéré par Lagrange qui, en 1773, avait démontré au fond que le déterminant adjoint d'un déterminant du troisième degré était égal au carré de ce dernier. Cauchy, en 1812, avait considéré le déterminant dont les éléments sont tous les mineurs de degré m d'un déterminant donné D de degré n, ou, comme on dit maintenant, le $n^{\text{ième}}$ composé de D. Enfin, Jacobi avait en 1841 démontré un théorème relatif à un mineur quelconque de l'adjoint.

Dans un article du *Philos. Magazine* de 1851, Sylvester considère le déterminant composé obtenu en partant d'un mineur M de degré r d'un déterminant donné D de degré n, en considérant tous les mineurs de degré $r+1$ contenant M et en les rangeant dans un tableau carré; le déterminant composé ainsi obtenu est égal à $D.M^{n-r-1}$. L'auteur généralise en prenant tous les mineurs de degré $r+h$; le déterminant composé ainsi obtenu est encore le produit d'une puissance de D par une puissance de M. Comme

cas limite, on obtient le $h^{\text{ième}}$ composé de D qui est ainsi une puissance de D.

Spottiswoode (*Journal de Crelle*, 1853) étudie les mineurs du déterminant adjoint, c'est-à-dire du $(n-1)^{\text{ième}}$ composé d'un déterminant D d'ordre n et indique, dans un certain nombre de cas, leur décomposition en un produit d'une puissance de D par un mineur de D. Il indique aussi quelques résultats relatifs aux mineurs du premier ordre du $m^{\text{ième}}$ composé de D.

Bazin, dans un article du *Journal de Liouville* (1854), considère des déterminants composés d'une nature un peu différente. Partant d'un tableau rectangulaire de n lignes et $n+h$ colonnes ($h \leqq n$), il appelle D le déterminant formé avec les n premières colonnes, E le déterminant obtenu en remplaçant dans D les h premières colonnes par les h dernières du tableau; il considère alors le déterminant composé Δ dont les éléments s'obtiennent en remplaçant dans D l'une quelconque des h premières colonnes par l'une quelconque des h dernières du tableau. Il arrive à l'égalité

$$\Delta = D^{h-1}E.$$

Chapitre VI : *Récurrents, de* 1841 *à* 1860 (p. 210-218). L'expression *récurrent* est due à E. Pascal en 1907; la nature des déterminants désignés sous ce nom est suffisamment mise en évidence par l'exemple suivant :

$$\begin{matrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \dots & a_0 \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \dots & a_1 \end{matrix}$$

qui se trouve dans une Note de Brioschi parue en 1857 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et qui, au facteur près $\frac{(-1)^r}{a_0^r}$, représente la $r^{\text{ième}}$ « fonction Aleph », c'est-à-dire la somme des produits avec répétition r à r des racines de l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Chapitre VII : *Wronskiens, de* 1838 *à* 1860 (p. 219-229). Le nom de *wronskien*, proposé par M. Muir lui-même en 1882, sert

à désigner un déterminant formé de n fonctions d'une variable et de leurs $n-1$ premières dérivées. Ces déterminants se présentent dans la théorie des équations différentielles linéaires. Le théorème d'après lequel les n fonctions sont liées par une relation linéaire à coefficients constants si leur wronskien est identiquement nul est énoncé par Puiseux en 1851 dans le *Journal de Liouville*, et regardé par lui comme déjà connu, mais sans aucune référence à son auteur.

Chapitre VIII : *Jacobiens, de* 1841 *à* 1860 (p. 230-253). — Rien de particulier à signaler dans ce Chapitre, sinon un exposé de la théorie des déterminants fonctionnels fait par J. Bertrand en 1851 dans le *Journal de Liouville*.

Chapitre IX : *Déterminants gauches, de* 1846 *à* 1860 (p. 254-293). — C'est à la période qui nous occupe qu'appartient le développement de la plus grande partie de la théorie des déterminants symétriques gauches. Jacobi avait déjà démontré en 1827 qu'un tel déterminant est nul, s'il est d'ordre impair. C'est Cayley qui, vingt ans plus tard, dans un article de trois pages, intitulé : *Sur les déterminants gauches* et inséré dans le *Journal de Crelle*, démontre le théorème fondamental que tout déterminant symétrique gauche d'ordre pair est le carré d'une fonction algébrique entière de ses coefficients; les fonctions qui s'introduisent ainsi, déjà considérées par Jacobi, seront appelées sept ans plus tard par Cayley des *pfaffiens*. Cayley démontre un théorème plus général, à savoir que tout déterminant symétrique gauche d'ordre impair *bordé* est le produit de deux pfaffiens.

Le théorème fondamental, ainsi que la propriété du pfaffien de changer de signe par l'échange de deux indices, ont ensuite été démontrés par Spottiswoode (1851, 1853) qui y ajouta des propriétés importantes du déterminant adjoint, puis par Brioschi (1854) qui se servit d'une identité classique due à Jacobi sur les mineurs à deux lignes et deux colonnes du déterminant adjoint, enfin par Baltzer (1857) et Horner (1865).

Signalons encore un théorème dû à Brioschi (1855) d'après lequel tout déterminant d'ordre pair peut être regardé comme un pfaffien : ce théorème fut retrouvé par Cayley dans un article paru en 1865 dans les *Phil. Trans.* de Londres.

Chapitre X : *Orthogonants, de* 1841 *à* 1860 (p. 294-323). — Les propriétés de l'équation en S, que Cauchy avait magistralement établies dans la période précédente, font encore l'objet de Mémoires importants. Cauchy lui-même est revenu sur cette question, sans apporter du reste aucune contribution nouvelle importante, trois mois avant sa mort, dans une Note de 1857 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* : c'est le dernier travail de l'immortel géomètre se rapportant à la théorie des déterminants. Kummer, dans un article paru en 1843 dans le *Journal de Crelle*, démontre la réalité des racines de l'équation en S en mettant le produit des carrés de leurs différences sous la forme d'une somme de carrés; Jacobi, dans le *Journal de Crelle* de 1844, met cette expression sous une forme beaucoup plus élégante et Borchardt, en 1845, dans le même Journal, simplifie encore la démonstration en montrant que le produit des carrés des différences est tout simplement le carré d'une matrice facile à former; dans le cas de l'équation

$$\begin{vmatrix} a-S & h & g \\ h & b-S & f \\ g & f & c-S \end{vmatrix} = 0,$$

cette matrice est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & h & g & h & b & f & g & f & c \\ A & H & G & H & B & F & G & F & C \end{vmatrix},$$

où les grandes lettres désignent les mineurs relatifs aux petites lettres. Une autre démonstration, très ingénieuse, est donnée par O. Hesse en 1859 dans un article du *Journal de Crelle*.

Un autre problème important, celui de l'expression, en fonctions rationnelles du nombre minimum de paramètres, des coefficients de la substitution orthogonale la plus générale à n variables, a fait l'objet d'un article fondamental de Cayley dans le *Journal de Crelle* de 1846, évidemment suggéré par les formules célèbres données par Olinde Rodrigues en 1840. Le point de départ de Cayley est la remarque qu'à tout système de variables x et ξ satisfaisant à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots,$$

on peut faire correspondre un système de variables auxiliaires θ telles qu'on ait simultanément

$$x_i = \sum_k l_{ik}\theta_k, \qquad \xi_i = \sum_k l_{ki}\theta_k,$$

où l'on a

$$l_{ii} = 1, \qquad l_{ij} = -l_{ji}, \qquad (i \neq j).$$

La méthode de Cayley a été généralisée par Hermite en 1853 (*Journal de Crelle*) pour la recherche des substitutions linéaires qui laissent invariante une forme quadratique donnée quelconque f; aux formules qui servent de point de départ à Cayley, sont substituées les formules

$$x_i = \theta_i - \frac{1}{2}\sum_k \lambda_{ik}\frac{\partial f}{\partial \theta_k}, \qquad \xi_i = \theta_i + \frac{1}{2}\sum_k \lambda_{ik}\frac{\partial f}{\partial \theta_k}.$$

Remarquons enfin que l'expression : substitution *orthogonale*, se trouve pour la première fois dans un article du *Phil. Magazine* (1852), où Sylvester donne une nouvelle démonstration de la réalité des racines de l'équation en S.

Chapitre XI : *Déterminants persymétriques, de* 1841 *à* 1860 (p. 324-357). — La dénomination de déterminants *persymétriques* est due à Sylvester qui, dans un Mémoire des *Phil. Transactions* de Londres de 1853, les caractérise comme ayant la même espèce de symétrie que la table d'addition de Pythagore. Ces déterminants se sont présentés à Jacobi dans un Mémoire du *Journal de Crelle* (1845) où il se propose de trouver l'extension de la formule d'interpolation de Lagrange, en substituant au polynome donné par la formule classique de Lagrange, le quotient $\frac{N(x)}{M(x)}$ de deux polynomes de degrés donnés n et m. Chacun de ces deux polynomes se présente sous la forme d'un déterminant persymétrique dont les éléments sont du premier degré en x.

Sylvester, dans un article du *Philos. Magazine* (1851) et un Mémoire du *Cambridge and Dublin Math. Journal* (1852), se propose de réduire une forme binaire de degré $2n-1$ ou $2n$ à la somme des puissances $(2n-1)^{\text{ièmes}}$ ou $(2n)^{\text{ièmes}}$ de n formes linéaires. Dans le premier cas, le problème est toujours possible et

le produit de n formes linéaires peut se mettre sous la forme d'un déterminant persymétrique que Sylvester appelle le *canonisant* de la forme donnée. Dans le second cas, le problème est en général impossible et la condition de possibilité s'obtient en annulant un certain déterminant persymétrique, le *catalecticant* de la forme donnée.

Enfin, certains déterminants persymétriques peuvent jouer le rôle des polynomes de Sturm, comme le montre Brioschi dans sa *Teorica dei Determinanti* de 1854 et dans un article de la même année paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. D'autre part, Rouché, dans une Note de 1858 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, met également les polynomes de Legendre sous la forme de déterminants persymétriques à éléments linéaires en x, ce qui rend évidentes les propriétés de leurs racines.

Chapitre XII : *Bigradients, jusqu'en* 1860 (p. 358-375). — Les *bigradients* sont des déterminants analogues au déterminant de Sylvester qui donne le résultant de deux polynomes entiers en x. O. Hesse, par des combinaisons de déterminants, vérifie directement l'identité du résultant de Sylvester et du résultant d'Euler (*Annali di Mat.*, 1858). La même vérification est faite, par un procédé analogue, par Borchardt (*Journal de Crelle*, 1859).

Chapitre XIII : *Hessiens, jusqu'en* 1860 (p. 376-400). — Le nom de *Hessien* est, là encore, dû à Sylvester (*Cambridge and Dublin Math. Journal*, 1851). Dans un Mémoire du *Journal de Crelle* (1844), Hesse considère ce qu'il appelle le *déterminant* d'une forme cubique ternaire, et montre que le déterminant du déterminant est une combinaison linéaire à coefficients constants de la forme elle-même et de son déterminant; l'expression de ces coefficients constants est donnée en 1849 par Aronhold (*Journal de Crelle*); ils sont égaux à $3S^3$ et $-2T$, en désignant par S et T les deux invariants de la forme. Cayley (*Journal de Crelle*, 1845) démontre un théorème analogue pour une forme biquadratique binaire et, plus généralement, pour une forme binaire quelconque, les coefficients étant cette fois des *covariants* de la forme au lieu d'être de simples invariants.

Un théorème relatif aux hessiens a une histoire assez curieuse. Hesse, dans un article du *Journal de Crelle* (1851), a démontré que si une forme à n variables peut, par une substitution linéaire, être ramenée à ne contenir que $n-1$ variables, son hessien est identiquement nul. Il a cru pouvoir démontrer la réciproque. Une objection faite par Bellavitis (*Memorie Istituto Veneto*, 1857) l'a poussé à en donner l'année suivante (*Journal de Crelle*) une démonstration plus rigoureuse. Mais cette réciproque est fausse.

Chapitre XIV : *Circulants, jusqu'en* 1860 (p. 401-412). — Les *circulants* sont des déterminants dont les différentes lignes se déduisent les unes des autres par permutation circulaire de leurs éléments. Considérés pour la première fois par Catalan (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1846), ils jouissent de la propriété d'être décomposables en un produit de facteurs linéaires, comme l'a démontré Spottiswoode (*Journal de Crelle*, 1853) et aussi de la propriété que le produit de deux circulants est un circulant, comme l'a virtuellement démontré Souillard (*Nouvelles Annales*, 1858).

Chapitre XV : *Continuants, jusqu'en* 1870 (p. 413-444). — Les *continuants* se présentent dans la théorie des fractions continues. Les numérateurs (ou les dénominateurs) des réduites successives peuvent être regardés comme les mineurs principaux (ou *coaxiaux*) successifs d'un déterminant ayant tous ses éléments nuls, sauf ceux de la diagonale principale et des deux diagonales voisines (supérieure et inférieure). Dans le cas particulier de la fraction continue

$$A_1 - \cfrac{1}{A_2 - \cfrac{1}{A_3 - \ldots}},$$

les deux diagonales voisines de la diagonale principale sont formées d'éléments tous égaux à 1, comme le montre Sylvester (*Phil. Magazine*, 1853) qui a le premier considéré les relations de la théorie des fractions continues avec les déterminants.

Chapitre XVI : *Formes spéciales moins communes, jusqu'en* 1860 (p. 445-471). — Il s'agit des *permanents*, des *déter-*

minants à éléments complexes au sujet desquels Hermite (*Comptes rendus*, 1855) a démontré un théorème analogue à celui de l'équation en S lorsque les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont complexes conjugués, des *unisignants* de Sylvester, et de quelques autres formes variées.

VOLUME III : *The Period* 1861 *to* 1880.

Cette troisième période peut être caractérisée par l'apparition d'un très grand nombre de traités (environ 60) consacrés exclusivement à la théorie des déterminants.

CHAPITRE I : *Déterminants en général de* 1860 *à* 1880 (p. 1-82). — Les très nombreux articles cités dans ce Chapitre sont pour la plupart sans grande importance, la théorie des déterminants ayant atteint son développement essentiel à l'époque qui nous occupe. Citons cependant des recherches très générales de Reiss dans un Ouvrage intitulé : *Beiträge zur Theorie der Determinanten*, paru en 1867, recherches qui se rapportent aux *théorèmes d'extension*.

Un théorème qui joue un rôle important dans la théorie des équations linéaires fait l'objet d'un certain nombre d'articles. Sylvester avait démontré en 1850 qu'il suffit que $(n-k+1)^2$ des mineurs à k lignes d'un déterminant d'ordre n s'annulent pour que tous s'annulent : c'est ce qu'il appelait la *loi homaloïdale*. Kronecker, cité par Balzer dans la seconde édition (1864) de la *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, a fait remarquer que pour que la conclusion soit certaine, il faut que les $(n-k+1)^2$ mineurs nuls aient en commun un mineur non nul à $k-1$ lignes. Le théorème ainsi complété et étendu aux tableaux rectangulaires a été démontré en 1867 par Dodgson dans son *Elementary Treatise on Determinants*, et en 1876 par Frobenius dans son Mémoire du *Journal de Crelle* sur le problème de Pfaff. Ce dernier a démontré deux théorèmes complémentaires : 1° si tous les mineurs à $m+1$ lignes sont nuls, les mineurs à m lignes formés avec un système quelconque de m lignes sont proportionnels à ceux formés avec un autre système de m lignes ; 2° si tous les

mineurs à $m+1$ lignes s'annulent, et s'il est possible de choisir un système de m lignes dont les mineurs à m lignes ne soient pas tous nuls et un système de m colonnes jouissant de la même propriété, le mineur commun aux deux systèmes n'est pas nul. C'est aussi à Frobenius (*Journal de Crelle*, 1877) qu'on doit l'expression de *rang* d'un déterminant, qui n'est autre que l'ordre du mineur principal de Rouché.

Une remarque curieuse, c'est qu'il faut attendre jusqu'à l'année 1877 pour avoir le premier Traité français sur les déterminants, celui de G. Dostor; jusque-là on n'avait eu en français que les traductions des Ouvrages de Brioschi et de Baltzer et deux courts Ouvrages du Belge Mansion (1875-1876) à l'usage des établissements d'instruction moyenne. Malgré son apparition tardive, le Traité de Dostor, comme le fait remarquer M. Muir, était loin d'avoir la valeur qu'on aurait pu espérer après tous ceux qui l'avaient précédé, en faisant même abstraction des erreurs qu'il contient.

Signalons enfin un intéressant procédé dû à Dodgson (*Proceed. R. Soc. London*, 1866) pour effectuer le calcul numérique d'un déterminant; ce procédé est à rattacher de la méthode employée par Matzka (*Abhandl. d. k. Böhm. Ges. d. Wiss.*, 1877) pour résoudre un système d'équations linéaires.

Chapitre II : *Déterminants et équations linéaires de* 1861 *à* 1878 (p. 83-93). — Il est remarquable qu'il faille attendre la période récente qui nous occupe pour trouver des recherches sur la théorie d'un système général d'équations linéaires dans ses rapports avec la théorie des déterminants. Les conditions générales de compatibilité d'un tel système, son degré d'indétermination quand il est compatible, ont fait l'objet de deux théories importantes, celle de Dodgson dans les Chapitres III et IV de son Traité de 1867, et celle, classique en France, de Rouché dans une Note aux *Comptes rendus* de 1875 et une Note du *Journal de l'École Polytechnique* de 1878.

Ces deux théories avaient été préparées par le théorème de Sylvester-Kronecker, dont il a été question plus haut, et par d'autres recherches antérieures, principalement celles de Trudi (1862) dans sa *Teoria de' Determinanti*. Les résultats de Dodgson

ne diffèrent naturellement pas au fond de ceux de Rouché, mais ils ne sont pas condensés dans un énoncé unique ; ils forment l'objet d'un assez grand nombre de propositions distinctes, suivant que le système à résoudre contient plus d'équations que d'inconnues, ou plus d'inconnues que d'équations, etc. La notion importante de *déterminant principal* est d'autre part entièrement due à Rouché, ainsi que celle de *déterminants caractéristiques*. M. Muir, qui conteste, on ne voit pas bien pourquoi, l'importance de l'énoncé unique de Rouché, fait d'autre part à la théorie de celui-ci des critiques en partie fondées. Il est certain, par exemple, que Rouché n'indique aucun moyen pratique d'obtenir le déterminant principal et il y aurait certainement des progrès à introduire dans l'enseignement des classes de mathématiques spéciales pour que les élèves voient dans le déterminant principal autre chose qu'une notion abstraite.

Chapitre III : *Déterminants axisymétriques de* 1846 *à* 1879 (p. 94-122). — Dans son Ouvrage *Determinanti* publié en 1874, Garbieri démontre en particulier la réalité des racines de l'équation en S du troisième degré en mettant cette équation sous la forme

$$\frac{g^2h^2}{S-\frac{F}{f}}+\frac{h^2f^2}{S-\frac{G}{g}}+\frac{f^2g^2}{S-\frac{H}{h}}=fgh.$$

Les conditions pour qu'une forme quadratique soit définie positive sont établies par Williamson (*Educ. Times*, 1872) et Buchwald (*Tidsskrift for Math.*, 1872) : les mineurs coaxiaux successifs

$$a_1,\quad |a_1b_2|,\quad |a_1b_2c_3|,\quad \ldots$$

du discriminant doivent être positifs, ce qui entraîne la même propriété pour tous les autres mineurs coaxiaux : le procédé employé, qui est la réduction en carrés, remonte en réalité à Lagrange.

Une autre propriété des mineurs d'un déterminant axisymétrique est établie par Secliger (*Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, 1875) : si le déterminant s'annule ainsi que l'un de ses mineurs du premier ordre M, tous les mineurs du premier ordre correspondant à la même ligne que M s'annulent également.

Nous pouvons signaler enfin un curieux déterminant arithmétique étudié par H.-J.-S. Smith (*Proceed. London Math. Soc.*, 1876) et qui a provoqué des généralisations de Mansion (*Messenger of Math.* et *Annales de la Soc. Sc. de Bruxelles*, 1877). Le Paige (*Nouv. Corresp. Math.*, 1878), Mansion (*Bull. Acad. Belgique*, 1878) : c'est celui dont l'élément a_{rs} est égal au plus grand commun diviseur des deux indices r, s ; sa valeur est égale au produit

$$\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n),$$

n désignant l'ordre du déterminant et φ la fonction arithmétique bien connue.

Chapitre IV : *Déterminants symétriques, mais non axisymétriques, de* 1862 *à* 1879 (p. 123-131). — Les déterminants dont il s'agit sont de deux formes différentes ; les premiers peuvent être appelés *centrosymétriques*, la symétrie ayant lieu par rapport au centre du tableau ; les autres ont des éléments quelconques à la diagonale principale, les autres éléments d'une même colonne étant égaux entre eux.

Chapitre V : *Alternants, de* 1860 *à* 1879 (p. 132-175). — C'est dans le cours de ce Chapitre que nous apprenons que l'expression *alternant* est due à M. Muir lui-même, dans une Note des *Proceed. R. Soc. Edinburgh* (1879), à moins qu'elle ne soit due à Sylvester ?

Il y a lieu de signaler un travail important de Naegelsbach intitulé : *Ueber eine Classe symmetrischen Funktionen* (1871). L'auteur donne l'expression générale d'un alternant quelconque $|a_1^\alpha a_2^\beta \ldots a_n^\nu|$ comme produit du déterminant $|a_1^0 a_2^1 \ldots a_n^{n-1}|$ par un déterminant dont les éléments sont des fonctions symétriques élémentaires de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les résultats de Naegelsbach sont retrouvés ou redémontrés par différents auteurs ; la démonstration la plus simple est certainement celle de Kostka (*Journal de Crelle*, 1875), qui arrive au résultat cherché par de simples combinaisons de colonnes effectuées sur un déterminant égal à l'alternant donné. Les résultats de Naegelsbach peuvent être retrouvés comme cas particuliers de formules plus générales dues à Beltrami (dans un Ouvrage de Garbieri sur les déterminants paru en 1874) et géné-

ralisées par Garbieri lui-même (*Giornale di Mat.*, 1878). Les formules de Beltrami donnent l'expression du déterminant

$$|f_1(\alpha_1)f_2(\alpha_2)\ldots f_n(\alpha_n)|,$$

où $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des polynomes de degré n, comme produit du déterminant de Vandermonde $|\alpha_1^0\alpha_2^1\ldots\alpha_n^{n-1}|$ par un déterminant d'ordre $n+1$ dont les éléments sont, pour les n premières lignes, les coefficients de $f_1, \ldots, f_n$, et pour la dernière, les fonctions symétriques élémentaires des α. Les généralisations de Garbieri se rapportent au cas où les polynomes sont de degré supérieur à n et au cas où l'on a affaire à des polynomes à deux variables. Les résultats de Naegelsbach se déduisent de ceux de Garbieri en prenant pour les f des monomes.

D'autres expressions des alternants, qui font intervenir les fonctions « aleph » au lieu des fonctions symétriques élémentaires, sont dues à Trudi (*Rendic. dell' Accad. Napoli*, 1864) et G. Salmon (*Modern higher Algebra*, 1876).

Une autre expression du quotient

$$\frac{|F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_m(x_m)|}{|x_1^0 x_2^1 \ldots x_m^{m-1}|},$$

où les $F(x)$ sont des polynomes de degré $n-1$ au plus, est donnée par Borchardt (*Abhandl. Akad. d. Wiss. Berlin*, 1860) sous la forme d'une formule d'interpolation qui fait intervenir les valeurs des polynomes pour n valeurs données $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la variable.

Chapitre VI : *Déterminants composés de* 1862 *à* 1880 (p. 176-207). — A la période qui nous occupe appartiennent des travaux importants généralisant les résultats obtenus par Sylvester, Spottiswoode et Bazin dans la période précédente.

E. Franke (*Journal de Crelle*, 1862) démontre que tout mineur *coaxial* de degré k du $m^{\text{ième}}$ composé d'un déterminant D de degré n est égal au produit de $D^{k-C_{n-1}^m}$ par le complémentaire du mineur correspondant du $(n-m)^{\text{ième}}$ composé.

Dans un Ouvrage important intitulé : *Beiträge zur Theorie der Determinanten*, M. Reiss utilise le théorème de Franke et celui de Sylvester de 1851 pour arriver dans certains cas à l'expression d'un mineur, *coaxial ou non*, du $m^{\text{ième}}$ composé de D

comme produit de puissances de D et de certains de ses mineurs ; une pareille décomposition n'est pas toujours possible ; Reiss indique des cas très étendus où elle l'est.

Dans la troisième section de son Ouvrage, Reiss considère des déterminants composés d'une autre nature, qui généralisent ceux de Bazin ; les éléments en sont des déterminants d'ordre n formés avec les éléments d'un tableau rectangulaire à n lignes ; des n colonnes du tableau qui servent à former ce déterminant élémentaire, les k premières restent fixes quand on se déplace sur une même ligne du déterminant composé, et les $n - k$ dernières restent fixes quand on se déplace sur une même colonne. On obtient un déterminant de cette nature si l'on multiplie l'un par l'autre deux déterminants, l'un Δ de degré C_n^k formé de ceux des mineurs de degré k du tableau qui sont obtenus en prenant toutes les combinaisons k à k des n lignes du tableau (les combinaisons de colonnes étant quelconques), l'autre Δ' de degré C_n^{n-k} obtenu d'une manière analogue au moyen de mineurs de degré $n - k$. Un cas particulier important est celui où le tableau a $2n$ colonnes, où Δ est le $k^{\text{ième}}$ composé du tableau des n premières colonnes et Δ' le $(n-k)^{\text{ième}}$ composé du tableau des n dernières. Le déterminant produit de Reiss, dont chaque élément est en somme un déterminant d'ordre n dont k colonnes appartiennent à un certain déterminant A de degré n et $n - k$ à un autre déterminant B de degré n, est égal au produit d'une puissance de A par une puissance de B.

Dans une Note des *Atti Accad. delle Sci. di Torino* (1876), d'Ovidio énonce également des théorèmes très généraux, mais qui semblent bien se ramener tous à ceux de Franke et de Reiss.

H. Picquet, dans deux Notes aux *Comptes rendus* et un Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique* de 1878, fait un exposé très développé de la théorie des déterminants composés qu'il redécouvre en grande partie sans connaître les travaux de ses prédécesseurs. L'un des théorèmes qu'il obtient, et qui est connu actuellement sous le nom de *théorème de Picquet*, n'est autre que le cas particulier signalé plus haut du dernier théorème de Reiss. Ce théorème, lorsque k est égal à 1, se réduit à un cas particulier du théorème de Bazin.

Signalons aussi des articles de Hunyady (*Journal de Crelle*, 1876, 1879) et Mertens (*Journal de Crelle*, 1877) où, à l'occasion

de certains théorèmes de géométrie, interviennent des déterminants *doublement* composés, c'est-à-dire dont les éléments sont des déterminants composés.

Chapitre VII : *Récurrents, de* 1858 *à* 1879 (p. 208-247). — Ce Chapitre contient les analyses d'un grand nombre d'articles se rapportant pour la plupart à la théorie des fonctions symétriques des racines d'une équation, au développement de certaines fractions rationnelles et à l'expression sous forme de récurrents de certains nombres arithmétiques, particulièrement les nombres de Bernoulli. Ces derniers apparaissent en particulier dans des articles de Siacci (1865), Naegelsbach (1874), Hammond (1875), Glaisher (1876), Lucas (1876 et 1877).

Chapitre VIII : *Wronskiens, de* 1862 *à* 1874 (p. 248-256). — Signalons seulement un Mémoire de Frobenius (*Journal de Crelle*, 1873) où l'auteur fait une étude systématique des wronskiens et démontre en particulier la *loi de condensation*

$$W(u_1, u_2, \ldots, u_\mu, v_1, v_2, \ldots, v_\nu) = \frac{W[W(u_1, \ldots, u_\mu, v_1), W(u_1, \ldots, u_\mu, v_2) \ldots W(u_1, \ldots, u_\mu, v_\nu)]}{[W(u_1, \ldots, u_\mu)]^{\nu-1}},$$

d'où il tire des conséquences intéressantes dans le cas particulier $\nu = 2$.

Chapitre IX : *Jacobiens, de* 1862 *à* 1877 (p. 257-271). — Aucun progrès important n'a été fait dans cette période. Il n'y a à signaler qu'un article de Trzaska (1871) qui établit la condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions de m variables indépendantes soient liées par p relations indépendantes, et un article de Casorati (*Mem. Istit. Lombardo*, 1874) qui établit la condition pour que n fonctions de n variables soient liées par une relation *homogène*.

Chapitre X : *Déterminants gauches et pfaffiens, de* 1861 *à* 1880 (p. 272-283). — Frobenius, dans son Mémoire *Ueber das Pfaff'sche Problem* paru en 1876 dans le *Journal de Crelle*, étudiant les propriétés des déterminants symétriques gauches,

démontre en particulier que le mineur principal d'un tel déterminant est toujours d'ordre pair et peut être supposé coaxial.

Clifford, dans une Note posthume remontant probablement à 1873, donne une définition symbolique d'un pfaffien d'ordre n comme le coefficient de $n!\, i_1 i_2 \ldots i_m$ dans le développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction linéaire des produits binaires de $2n$ unités alternées $i_1, \ldots, i_{2n}$. De son côté, Tanner (*Quart. Journ. of Math.*, 1878) considère certains déterminants symboliques, tels que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

qui peuvent être considérés comme des pfaffiens formés avec les éléments $\frac{\partial y_r}{\partial x_s} - \frac{\partial y_s}{\partial x_r}$.

Chapitre XI : *Orthogonants, de* 1855 *à* 1879 (p. 284-308). — Peu de résultats nouveaux importants ont été obtenus dans la période considérée. Trudi, dans son Traité de 1862, démontre que la somme des carrés de tous les mineurs de degré h formés avec h lignes données d'un orthogonant est égale à 1. Bardelli (*Rendic. Istit. Lombardo*, 1876) considère un orthogonant A dont les éléments sont des fonctions d'une variable, et le déterminant A′ formé des dérivées de ces éléments. Le produit A′A est un déterminant P symétrique gauche, d'où il résulte que A′ est nul si A est d'ordre impair, et égal au carré d'un pfaffien si A est d'ordre pair. De plus, les deux déterminants A'^2 et P^2 sont identiques élément à élément.

Voss (*Math. Annalen*, 1877) étudie les déterminants dont les éléments sont les coefficients de la substitution définie par l'identité

$$\Sigma y_i^2 = s \Sigma x_i^2 ;$$

les orthogonants en sont des cas particuliers, pour $s = 1$. L'auteur généralise les propriétés les plus importantes des orthogonants.

Clebsch (*Journal de Crelle*, 1861) démontre que les racines de l'équation caractéristique d'un déterminant symétrique gauche sont purement imaginaires.

Signalons enfin une Note de Börsch (*Zeitschrift f. Math. u. Phys.*, 1879) qui démontre un théorème analogue au théorème classique de M. Hadamard relatif au maximum de la valeur numérique d'un déterminant : le maximum de la valeur d'un déterminant de degré $n+1$ dont la première colonne est formée de 1 et tel que la somme des carrés des éléments de chaque ligne est égale à 2, est égal à $\sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}$.

Chapitre XII : *Déterminants persymétriques, de* 1836 *à* 1879 (p. 309-326). — Signalons la *Dissertation* de Hankel (1861) consacrée à l'étude des déterminants persymétriques, qu'il appelle *orthosymétriques*. Il montre que le déterminant persymétrique d'ordre n dont les éléments sont $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-2}$ est égal au déterminant persymétrique dont les éléments sont les $2n-2$ différences successives

$$a_0, \quad \Delta^1 a_0, \quad \Delta^2 a_0, \quad \ldots, \quad \Delta^{2n-2} a_0;$$

il en déduit différentes conséquences intéressantes en donnant aux a_i des valeurs particulières ; citons seulement le cas où $a_k = f(x+k)$, f étant un polynome de degré $\mu < n$.

Chapitre XIII : *Bigradients, de* 1859 *à* 1880 (p. 327-362). — Le Mémoire le plus important cité dans ce Chapitre est la partie de la *Teoria de Determinanti* de Trudi (1862) consacrée aux bigradients. Trudi considère des tableaux rectangulaires *à deux échelles* ou bigradients formés au moyen de deux suites

$$a_0, a_1, \ldots, a_m; \quad b_0, b_1, \ldots, b_n$$

de quantités et que M. Muir désigne par la notation

$$\left\| \begin{matrix} (a_0, \ldots, a_m)_r \\ (b_0, \ldots, b_n)_s \end{matrix} \right\|.$$

Cette notation s'explique suffisamment par l'identité de définition suivante :

$$\left\| \begin{matrix} (a_0, \ldots, a_4)_2 \\ (b_0, \ldots, b_3)_3 \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|;$$

les indices r et s de la notation générale désignent les nombres de lignes où figurent respectivement les a et les b. Les deux suites de quantités étant données, on peut former avec elles n tableaux rectangulaires bigradients ($m \geqq n$), r prenant les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

Après avoir étudié des procédés techniques de *condensation* ou de *dilatation* des bigradients, Trudi s'occupe de la représentation des polynomes qu'on obtient comme restes des divisions successives qui conduisent au plus grand commun diviseur de deux polynomes

$$A = a_0 x^m + \ldots + a_m$$
$$B = b_0 x^n + \ldots + b_n \qquad (m \geqq n).$$

Le $r^{\text{ième}}$ reste, indépendamment d'un coefficient numérique, a pour coefficients les déterminants successifs du tableau

$$\left\| \begin{matrix} (a_0, \ldots, a_m)_r \\ (b_0, \ldots, b_n)_{m-n+r} \end{matrix} \right\|.$$

Ce reste peut encore être mis sous la forme $U_r A + V_r B$, les polynomes U_r et V_r étant formés au moyen de bigradients. Chacune des suites

$$U_0, U_1, \ldots, U_{n+1}; \quad V_0, V_1, \ldots, V_{n+1}$$

jouit de propriétés analogues à celles des suites de Sturm.

Pour que les deux polynomes aient un plus grand commun diviseur d'ordre k, il faut et il suffit que les premiers déterminants de chacun de leurs k derniers tableaux bigradients soient nuls; Trudi donne alors le moyen de former ce plus grand commun diviseur, ainsi que les quotients de A et B par ce dernier. Le cas où B est la dérivée de A est ensuite étudié; la condition pour que le polynome A ait seulement k racines distinctes est établie d'une manière simple.

Parmi les autres auteurs cités, Lemonnier, dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure* (1878), développe, pour l'existence de k racines communes à deux équations, des conditions analogues à celles de Trudi. On peut citer aussi deux articles de Darboux (*Bull. Sc. math.*, 1876, 1877) sur le même sujet.

Chapitre XIV : *Hessiens, de* 1862 *à* 1879 (p. 363-371). — Le pseudo-théorème de Hesse, d'après lequel une forme à n variables

dont le hessien est identiquement nul peut s'exprimer au moyen de $n-1$ combinaisons linéaires des variables, fait l'objet d'un article de Pasch (*Journal de Crelle*, 1874), qui démontre le théorème pour les formes cubiques ternaires et quaternaires; de Gordan et Nœther (*Sitzungsb. Soc. zu Erlangen*, 1875), qui le démontrent pour toutes les formes ternaires et quaternaires et en prouvent la fausseté dans le cas de plus de quatre variables; on trouve dans un Mémoire des *Math. Annalen* (1876) une exposition soigneuse des résultats des deux géomètres allemands.

Chapitre XV : *Circulants, de* 1861 *à* 1880 (372-392). — Aux propriétés des circulants découverts dans la période précédente, ajoutons les deux suivantes : Baltzer, dans la troisième édition de son Traité (1870), démontre que, dans chaque terme du circulant $C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, la somme des indices est divisible par n. Stern (*Journal de Crelle*, 1871) démontre que si l'on considère le facteur

$$a_1 + a_2\theta + \ldots + a_n\theta^{n-1} \qquad (\theta^n = 1)$$

du circulant $C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, le cofacteur est

$$A_1\theta^n + A_2\theta^{n-1} + \ldots + A_n\theta,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les mineurs relatifs aux éléments de la première ligne.

Puchta (*Denkschr. Akad. d. Wiss. Wien*, 1877) considère des circulants *composés* obtenus en remplaçant par des circulants les différents éléments d'un circulant donné.

Chapitre XVI : *Continuants, de* 1850 *à* 1880 (p. 393-422). — Signalons surtout une exposition de la théorie des continuants par Günther dans un Ouvrage intitulé : *Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form* (1873) et deux Notes de T. Muir (*Proceed. R. Soc. Edinburgh*, 1874) qui exposent des résultats déjà en partie obtenus.

Chapitre XVII : *Multilinéants, jusqu'en* 1877 (p. 423-428). — Un *multilinéant* est en fait un déterminant d'ordre infini, c'est-à-dire illimité à droite et en bas. Le premier exemple de multilinéant remonte à Schweins (1825). Fürstenau, dans un

« programme » de 1860, exprime la plus petite racine réelle d'une équation algébrique comme limite du quotient de deux mineurs coaxiaux successifs d'un multilinéant récurrent formé au moyen des coefficients de l'équation ; il trouve ensuite les autres racines réelles par des procédés analogues. Hill, dans un Mémoire des *Acta math.* de 1886 consacré à la théorie de la Lune, rencontre de même une équation dont le premier membre est un déterminant infini renfermant l'inconnue au second degré dans chaque élément de sa diagonale principale.

Chapitre XVIII : *Déterminants cubiques et à n dimensions, jusqu'en* 1880 (p. 429-431). — M. Muir se contente de donner la liste des articles s'occupant de cette question.

Chapitre XIX : *Déterminants bordés, jusqu'en* 1880 (p. 432-446). — Les déterminants bordés, qui se présentent fréquemment en Géométrie analytique, apparaissent dans l'œuvre de Cayley en 1846, dans celle de Sylvester en 1850, dans celle de Hesse en 1853.

Hesse (*Journal de Crelle*, 1872) démontre des identités importantes entre les déterminants obtenus en bordant un déterminant donné par différentes suites de quantités.

Darboux (*Journal de Liouville*, 1874) démontre que si $|a_{in}|$ désigne un déterminant axisymétrique, la condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant obtenu en le bordant à droite et en bas par p séries quelconques de quantités soit identiquement nul est que tous les mineurs de degré $n-p$ de $|a_{in}|$ soient nuls.

Voss (*Math. Annalen*, 1877) et Le Paige (*Bull. Soc. math. de France*, 1880) représentent le déterminant obtenu en bordant un déterminant Δ de degré n par r lignes et r colonnes comme le quotient par Δ^{r-1} d'un certain déterminant de degré r.

Chapitre XX : *Déterminants dont les éléments sont des nombres combinatoires, jusqu'en* 1880 (p. 447-462). — A signaler surtout deux Mémoires importants de Zeipel (*Lunds Univ. Årsskrift*, 1865, 1871).

Chapitre XXI : *Déterminants zéroaxiaux, jusqu'en* 1888 (p. 463-468). — Il s'agit des déterminants dont la diagonale prin-

cipale a tous ses éléments nuls ; les recherches citées se rapportent au nombre des termes non nuls du développement d'un tel déterminant.

Chapitre XXII : *Les formes spéciales moins communes, de 1839 à 1880* (p. 469-496). — Catalan (*Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles*, 1839), Enneper (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 1861, 1865) et Heine (*Journal de Crelle*, 1861) considèrent des déterminants dont les éléments sont certaines intégrales définies hyperelliptiques.

Rosanes (*Journal de Crelle*, 1872) étudie les propriétés des déterminants formés par les dérivées partielles du second ordre de trois formes binaires de même degré.

Spottiswoode (*Proceed. London Math. Soc.*, 1872) étudie les déterminants dont les éléments sont des nombres alternés, la formation des différents termes du développement étant soumise à la restriction que l'ordre naturel des lignes n'est pas altéré dans la multiplication des éléments qui composent ces termes.

Le Volume se termine enfin par la liste des auteurs cités.

On aura pu juger par ce qui précède de la richesse d'informations de l'Ouvrage de M. Muir. Il sera à consulter pour toute recherche se rapportant, d'une manière ou d'une autre, à la théorie des déterminants.

E. Cartan.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLIV.

337

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLIV; 1920. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ANNUAIRE POUR L'AN 1920, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques : 1° La prévision de la houle, par J. Renaud; 2° Les nouvelles unités légales de mesures industrielles, par Ch. Lallemand 53-58

ASKWITH (E.-H.). — A course of pure Geometry, containing a complete geometrical treatment of the properties of the conic sections [Cours de Géométrie pure, contenant un exposé géométrique complet des propriétés des sections coniques] 74-76

BIANCHI (Luigi). — Lezioni sulla Teoria dei gruppi continui finiti di Trasformazioni [Leçons sur la théorie des groupes continus finis de transformations] 8-16

BOUTROUX (Pierre). — Les principes de l'Analyse mathématique; Exposé historique et critique. T. II 16-20

CONGRÈS INTERNATIONAL DE MATHEMATIQUES DE STRASBOURG (Le) :
1° Note de la Rédaction;
2° Allocution de M. Émile Picard (Séance d'ouverture);
3° Allocution de M. Émile Picard (Séance de clôture) 193-200

FUBINI (Guido). — Lezioni di Analisi matematica [Leçons d'Analyse mathématique]. 3e édit. 73-74

HEATH (Sir Thomas L.). — Euclid in Greek. Book I [Euclide en grec. Livre I]. Avec une Introduction et des Notes 172-174

LA VALLÉE POUSSIN (C. DE). — Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, professées à la Sorbonne 137-153

LEFSCHETZ (Salomon). — Mémoire sur certains nombres invariants

Pages.

qui se présentent dans la théorie des multiplicités algébriques (Mémoire ayant obtenu, en 1919, le prix Bordin)..... 5-7

LEWIS (C.-I.). — A survey of Symbolic Logic [Revue de la Logique symbolique]..... 154-155

MASCART (Jean). — La vie et les travaux du chevalier Jean-Charles de Borda ((1733-1799): Épisodes de la vie scientifique au XVIIIe siècle. Avec une introduction par M. Émile Picard..... 7-8

MERSENNE. *Voir* TORRICELLI A MERSENNE (Lettre de).

MUIR (Thomas). — The theory of determinants in the historical order of developmeut [La théorie des déterminants dans l'ordre historique de son développement] :

Vol. I : Part I. General determinants up to 1841; Part II. Special determinants up to 1841;

Vol. II : The Period 1841 to 1860;

Vol. III : The Period 1861 to 1880..... 297-337

PETROVITCH (Michel). — Les spectres numériques. Avec une Préface de M. Émile Borel..... 27-31

PICARD (Émile). — Notice historique sur la vie et l'œuvre de Lord Kelvin. (Lue dans la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences, le 22 décembre 1919.)..... 37-40

ROCQUES DESVALLÉES (H.). — Tables logarithmiques et trigonométriques à quatre décimales (argument en arc et en temps) et Tables à trois décimales, à l'usage des physiciens et des navigateurs..... 41

TORRICELLI (Opere di Evangelista) [Œuvres d'Evangelista Torricelli], publiées à l'occasion du 3e centenaire de sa naissance, avec le concours de la ville de Faenza, par Gino Loria et Giuseppe Vassura :

Vol. I (en deux parties) : Geometria [Géométrie]; publié par les soins de Gino Loria.

Vol. II : Lezioni accademiche. Meccanica. Scritti vari [Leçons académiques. Mécanique. Écrits divers]; publié par les soins de Giuseppe Vassura.

Vol. III : Racconto d'alcuni problemi. Carteggio scientifico [Exposition de quelques problèmes, Correspondance scientifique]; publié par les soins de Giuseppe Vassura..... 225-243

TORRICELLI A MERSENNE (Lettre de), de la fin de mars 1645..... 243-248

VEBLEN (O.) and YOUNG (J.-W.). — Projective Geometry [Géométrie projective]; Vol. II, par Oswald Veblen..... 105-112

VESSIOT (E.). — Leçons de Géométrie supérieure, professées à l'Université de Lyon, et rédigées par M. Anzemberger. Avec une Préface de M. Kœnigs. Édition revue et augmentée..... 21-25

VIVANTI (Giulio). — Nuovi Esercizi di Analisi infinitesimale, tratti dalle matematiche applicate [Nouveaux exercices d'Analyse infinitésimale, tirés des mathématiques appliquées]..... 26-27

WILSON (Edwin-Bidwell). — Aeronautics. A class text [Aéronautique. Aide-mémoire]..... 169-172

YOUNG (J.-W.). — *Voir* VEBLEN (O.) and YOUNG (J.-W.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE..... 136-168

INFORMATION..... 20

MÉLANGES.

Pages.

GAMBIER (Bertrand). — Application de deux surfaces l'une sur l'autre 65-72, 76-91

HOSTINSKY (B.). — Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille..... 126-136

LA VALLÉE POUSSIN (C. DE). — Les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent..... 267-296

MONTESSUS DE BALLORE (R. de).—Les biquadratiques gauches. 31-36, 42-50, 58-64

NÖRLUND (N.-E.). — Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies..... 174-192, 200-220

PICARD (Émile). — Congrès international des mathématiciens..... 51-52

ROSENBLATT (Alfred). — Sur un théorème de A. Liapounoff..... 156-168

VALIRON (G.). — Remarques sur le théorème de M. Picard..... 91-104

VALIRON (G.). — Les fonctions entières de deux variables et les ensembles de mesure nulle..... 112-125

VERGNE (H.). — Sur quelques points d'hydrodynamique.... 220-224, 249-256, 257-267

342

34 3

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

Boutroux (Pierre). 174.
Buhl (A.). 155.
Cahen (E.). 76.
Cartan (E.). 337.
Drouin (Pierre). 20.
Er. L. 41, 58.
Fréchet (Maurice). 172.
Garnier (René). 27, 31, 74, 112.
Kœnigs (G.). 25.
La R. 20.
La Rédaction. 193.
Lebesgue (H.). 153.
Lebon (Ernest). 40.
Picard (Émile). 7, 8, 197, 200.
Vessiot (E.). 16.
Waard (C. de). 243.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLIV.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
Quai des Grands-Augustins, 55
61478-20

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SECONDE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. Émile PICARD, *Président.*

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

A. GUILLET, *Secrétaire.*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard,* Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue Joseph-Bara, n° 4, Paris, VIe.

61478 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMAR,
G. KŒNIGS, G. LORIA, S. HINDI, H. VILLAT, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
ERN. LEBON, *Secrétaire de la Rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET E. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLIV. — ANNÉE 1920.

(LIVe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1920

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 167, 2e semestre 1918 (1).

Andrade (J.). — Sur une famille de déplacements, et sur une généralisation du dièdre (16-18).

L'auteur continue l'étude, commencée dans une Note précédente (T. 166, 1918, p. 731), des transformations qui peuvent être représentées par une similitude directe entre deux cycles. Il montre en particulier que : étant donnés deux cycles égaux, il existe toujours une rotation convenable, autour d'un axe convenable, capable de coucher le premier cycle sur le second. Cet axe mérite une attention particulière en géométrie appliquée.

Humbert (P.). — Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre (18-20).

Étant donné le polynome de Legendre $P_n(z)$, l'identité

$$A_n(z)\,P_n(z) + B_n(z)\,P'_n(z) \equiv 1$$

définit les polynomes A_n et B_n, de degré $(n-2)$ et $(n-1)$ respectivement;

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIII, 2e p., p. 43.

ceux-ci jouent un rôle important dans l'étude de la fonction de Legendre de seconde espèce.

L'auteur en indique plusieurs propriétés remarquables : relations de récurrence, équations différentielles qu'ils vérifient, développements en série, intégrales définies, etc.

Humbert (*G.*). — Sur les représentations d'un entier par les formes quadratiques ternaires indéfinies (49-55).

Dans une Note antérieure (T. 166, 1918, p. 925), l'auteur avait étendu à ces formes indéfinies les résultats connus pour le nombre de représentations d'un entier par une forme ternaire positive, à condition de ne considérer que les représentations intérieures au domaine de Poincaré; après avoir rappelé la définition de ce domaine, il indique ici des énoncés plus précis et plus complets que les précédents, et il les vérifie sur de nombreux exemples numériques.

Sparre (*M. de*). — Avantages résultant de l'emploi d'un étranglement à l'entrée des réservoirs ou pare-chocs destinés à atténuer les coups de bélier (115-118).

L'auteur montre que, pour une conduite donnée et une valeur donnée du coup de bélier, cet étranglement permet de réduire de moitié le volume du réservoir. De plus, ce dispositif absorbe, pendant la compression, sensiblement la moitié de la force-vive initiale et supprime ainsi presque complètement les oscillations et les dangers de résonances provenant du réservoir.

Vessiot (*E.*). — Sur les développements trigonométriques de la Mécanique céleste (123-126).

L'auteur expose une méthode nouvelle qui permet d'obtenir la solution formelle du problème des n corps sous forme de séries trigonométriques; elle est basée sur une propriété fondamentale des systèmes canoniques, qu'il a démontrée lui-même : les équations qui définissent l'intégrale générale d'un système canonique peuvent représenter une famille de transformations canoniques (*voir* t. 165, 1917, p. 99).

Humbert (*G.*). — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies (181-186).

L'auteur définit, pour une forme quadratique ternaire indéfinie, le domaine de Poincaré dans le plan et sa relation avec le domaine spatial de Poincaré, ainsi que l'aire non euclidienne du domaine plan. Cela posé, si l'on considère des formes ternaires indéfinies, proprement primitives, de mêmes invariants impairs, en reprenant les calculs de Stephen Smith pour l'expression de la mesure d'un genre de formes positives, on est conduit à la formule qui donne la somme des domaines de Poincaré pour les réciproques des formes données.

Boussinesq (*J.*). — Formule fondamentale de Tresca pour le poinçonnage d'un bloc cylindrique de plomb (186-192).

L'auteur tente d'appliquer à l'étude du poinçonnage les équations générales de l'écoulement lent d'un semi-fluide, qu'il a données dans une Note antérieure (T. 166, 1918, p. 1016); ce problème n'est abordable que si l'on admet des hypothèses simplifiant les calculs; l'auteur le traite en admettant, comme l'a fait Tresca, que le poinçonnage détermine le glissement *sans frottement dans le sens vertical* d'un cylindre axial à l'intérieur d'un cylindre annulaire; il retrouve ainsi la formule de Tresca. Mais ces hypothèses donnent lieu, dans l'étude des déformations, à des équations incompatibles; on y remédie en faisant une hypothèse sur l'existence de pressions verticales à la surface supérieure du bloc, ainsi que dans toute couche horizontale; l'auteur parvient ainsi aux formules donnant les déformations et la pression verticale.

Boussinesq (*J.*). — Seconde et troisième formule de Tresca, pour le poinçonnage d'un bloc à surface latérale non plus libre, mais enchâssée dans un cylindre creux, rigide et poli, et pour son écoulement par un orifice inférieur, sous la pression d'un piston de même rayon que lui (221-226).

L'auteur démontre les formules donnant la charge du piston, la pression et la déformation en un point du bloc en introduisant des hypothèses simplificatrices sur les pressions, semblables à celles qu'il a utilisées dans la Note précédente.

Boussinesq (*J.*). — Confirmation, pour un bloc épais, du principe de la théorie approchée du poinçonnage, c'est-à-dire de la possibilité d'y négliger l'action tangentielle du cylindre central sur la partie annulaire; et cela, par comparaison avec le cisaillement auquel donne lieu, quand le bloc s'est aminci, l'exagération relative de cette action tangentielle; formules de Tresca pour la hauteur des débouchures se produisant alors (253-256).

L'auteur met en évidence l'importance fondamentale de l'épaisseur H du bloc, dans l'explication des phénomènes de poinçonnage d'un bloc reposant sur une plaque rigide percée d'un orifice de même axe et de même rayon que le poinçon. Si H est grand, tout se passe comme si l'orifice n'existait pas, le cylindre intérieur du bloc qui prolonge le poinçon glissant sans frottement sur le cylindre annulaire. Si H est petit, au contraire, l'action tangentielle prédomine, il y a cisaillement du cylindre central avec expulsion d'une débouchure, dont la hauteur est donnée par une formule de Tresca.

Boussinesq (*J.*). — Solution rationnelle pour les deux problèmes du poinçonnage et de l'écoulement des blocs plastiques, munis d'une ceinture rigide polie (285-290).

L'auteur reprend le problème traité dans l'avant-dernière Note, mais sans faire d'hypothèse simplificatrice sur la formule reliant les composantes des

pressions principales; il obtient ainsi des formules qui diffèrent de très peu de celle de Tresca.

Montessus de Ballore (*R. de*). — Sur les courbes algébriques planes ayant des points multiples communs (290-293).

L'auteur démontre que : si les équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, de degré n en y, représentent deux courbes planes algébriques admettant l'origine comme point multiple d'ordre n, il existe deux polynomes $A(x, y)$, $B(x, y)$, vérifiant l'identité $x^{2n-1}\rho(x, y) = A\varphi + B\psi$; ρ est d'ailleurs, à un facteur x^α près, le résultant des deux équations en y : $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Il démontre en outre une formule analogue relative au cas général de deux courbes admettant des points multiples communs d'ordre quelconque.

Appell (*P.*). — Sur l'intégration des équations différentielles simultanées que vérifie le polynome $U_{m,n}$ d'Hermite (309-315).

Didon a montré que les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite s'expriment simplement au moyen des intégrales de deux certaines équations simultanées aux dérivées partielles du second ordre. L'auteur remarque que, par un changement de variables très simple, ces équations prennent la forme de celles que vérifie une fonction hypergéométrique de deux variables et que, par suite, les polynomes d'Hermite s'expriment au moyen de ces fonctions hypergéométriques. Une étude plus approfondie montre ensuite que ces fonctions se ramènent dans ce cas à une fonction hypergéométrique de Gauss, qui ne dépend de x et de y que par l'intermédiaire de l'expression $y(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

L'auteur indique en terminant une autre transformation des équations de Didon, qui montre comment interviennent, dans cette théorie, les polynomes de Legendre et les fonctions sphériques de deuxième espèce.

Plancherel (*M.*). — Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de polynomes de Legendre (325-328).

L'auteur introduit la notion de *paramètre généralisé du second ordre*, qui joue sur la sphère un rôle analogue à celui de la dérivée seconde généralisée dans le plan; cela lui permet, en suivant la méthode de M. de la Vallée Poussin, de démontrer, pour le développement d'une fonction en série de polynomes de Legendre, de fonctions de Bessel, ou de fonctions de Sturm-Liouville, des résultats analogues à ceux qu'a obtenus celui-ci sur l'unicité des développements en série trigonométrique.

Cartan (*E.*). — Sur les variétés à 3 dimensions (357-360).

L'auteur se propose d'étudier le problème de la déformation des variétés à p dimensions dans l'espace euclidien à n dimensions, et tout particulièrement le cas $p = 3$. Dans cette Note, il introduit les notions fondamentales de cette théorie : *hyperplan osculateur*, *réseau asymptotique*, *réseau linéaire de cônes du second ordre*, *tangentes conjuguées*, *plan tangent distingué*, *etc.*

On peut classer, au point de vue projectif, tous les types de réseaux asymptotiques et montrer qu'il existe des variétés correspondant à chacun d'eux; le degré de généralité de ces variétés se détermine par le moyen de la théorie des systèmes différentiels en involution, due au même auteur.

Straneo (*P.*). — Sur l'extension à la physique des principes de l'homogénéité et de la similitude et sur une remarquable relation entre les constantes universelles d'une même théorie (360-363).

L'auteur montre que les dimensions des constantes universelles figurant dans une théorie physique doivent satisfaire à un certain système d'équations linéaires et homogènes; cela permet de prévoir leur forme et d'en tirer parti pour la prévision des lois physiques, comme on le fait depuis longtemps en Mécanique. La Note se termine par quelques applications à des théories connues.

Denjoy (*A.*). — Démonstration de la propriété fondamentale des courbes de M. Jordan (389-391).

L'auteur donne une démonstration nouvelle du théorème de M. Jordan, au sujet des ensembles plans dont les points correspondent à ceux d'une circonférence, chacun à chacun, avec réciprocité et continuité : ces ensembles divisent le plan en deux régions.

Picard (*E.*). — Quelques remarques sur la décomposition en facteurs primaires et le prolongement des fonctions analytiques (405-408).

L'auteur montre que la méthode de décomposition en facteurs primaires, bien connue pour les fonctions entières, peut être généralisée aux fonctions uniformes qui admettent une infinité de zéros se rapprochant indéfiniment d'une ligne C; cette ligne peut être quelconque et donnée *a priori*, comme on le voit sur un exemple; elle limite alors le domaine de la fonction, qui ne peut être prolongée analytiquement au delà de C.

Il n'en est plus ainsi pour les fonctions de deux variables : une surface S quelconque ne peut limiter le domaine d'une fonction analytique, méromorphe par exemple; l'auteur rappelle la condition que doit remplir la surface frontière et signale l'importance de cette question.

Appell (*P.*). — Sur des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles et sur les cas de réduction des fonctions hypergéométriques de deux variables (408-413).

Les quatre fonctions hypergéométriques fondamentales de deux variables vérifient chacune un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, dont l'intégrale générale dépend d'une manière linéaire et homogène de 3 ou 4 constantes arbitraires; mais il peut se faire qu'une telle fonction satisfasse à un système d'équations analogues, contenant 1, 2 ou 3 équations de plus, de sorte

que l'intégrale générale ne dépende que de 3, 2 ou 1 constante seulement; la fonction considérée sera dite alors *réductible*.

L'auteur indique la voie par laquelle on pourrait obtenir tous les cas de réduction et en étudie quelques exemples.

Cartan (*E.*). — Sur les variétés développables à 3 dimensions (426-428).

L'auteur s'appuie sur les fondements qu'il a posés dans sa Note précédente (*voir* plus haut), au sujet de la déformation des variétés à 3 dimensions dans l'espace euclidien à n dimensions, pour l'étude du cas où une telle variété est développable; il faut et il suffit pour cela qu'il existe h plans tangents distingués tels que les h normales distinguées correspondantes soient rectangulaires (h étant l'ordre du réseau asymptotique). L'auteur étudie ensuite le degré de généralité d'une variété développable réelle pour laquelle h a une valeur donnée, et montre ainsi que, en général, une telle variété n'est pas réglée.

Humbert (*P.*). — Les fonctions électrosphériques sous forme de déterminants (428-430).

MM. Guillet et Aubert ont donné le nom de fonctions électrosphériques à certains polynomes qui interviennent fréquemment dans la résolution numérique de certains problèmes d'électricité; ces polynomes ont été définis par des relations récurrentes qui donnent des valeurs compliquées pour leurs coefficients; l'auteur donne ici le moyen d'écrire ces polynomes sous forme de déterminants très simples.

Scorza (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes à trois variables indépendantes (454-455).

L'auteur indique brièvement une classification de divers types de corps de fonctions abéliennes.

Appell (*P.*). — Sur une équation différentielle ordinaire liée à certains systèmes d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles (469-472).

Soit un système d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles dont l'intégrale générale (z) s'exprime en fonction linéaire de p constantes arbitraires; si l'on établit entre z et y une relation $y = \varphi(x)$, il est évident que z sera l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle ordinaire d'ordre p. L'auteur indique le moyen de former cette dernière équation et montre le rôle qu'elle joue dans l'intégration du système donné. Cette théorie s'applique en particulier aux quatre fonctions hypergéométriques fondamentales, dont l'auteur s'est occupé dans sa Note précédente (*voir* plus haut).

Cartan (*E.*). — Sur les variétés de Beltrami à 3 dimensions (482-484).

L'auteur désigne ainsi les variétés à 3 dimensions, d'un espace euclidien à n dimensions, dont le ds^2 est de courbure constante, égale à -1; il énonce la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété réelle appartienne à ce type, et il étudie particulièrement l'existence de ces variétés et leur degré de généralité dans l'espace à 5 dimensions. La Note se termine par quelques considérations sur les cas où $n > 5$.

Boussinesq (*J.*). — Théorie du poinçonnage et de l'écoulement des blocs plastiques : phase élastique de ces phénomènes (505-510).

Les formules obtenues par l'auteur, dans ses Notes précédentes, au sujet des phénomènes de poinçonnage d'un bloc, à surface latérale libre ou munie d'une ceinture rigide et posé sur une surface plane, percée ou non d'un orifice, supposent que le bloc est à l'état plastique par suite des fortes pressions exercées sur lui par le poinçon. Tant que ces fortes pressions ne sont pas atteintes, le bloc est encore à l'état élastique; l'auteur étudie les phénomènes qui se produisent dans cette première phase, en particulier les pressions exercées par le cylindre central sur la face concave du cylindre annulaire, et compare les résultats obtenus dans les deux phases du poinçonnage.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiés par les polynomes hypersphériques (519-522).

Dans une Note précédente, M. Appell a donné une méthode directe pour former le système d'équations linéaires aux dérivées partielles auquel satisfont les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite; l'auteur emploie ici une méthode analogue pour former le système auquel satisfont les polynomes d'Hermite généralisés dans l'espace à n dimensions, définis par M. Appell.

Humbert (*P.*). — Sur les équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes d'Hermite, déduits d'une exponentielle (522-525).

Si l'on pose

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

et

$$H_{m,n}(x, y) = (-1)^{m+n} e^{\varphi} \frac{\partial^{m+n} e^{-\varphi}}{\partial x^m \partial y^n},$$

on définit ainsi les polynomes $H_{m,n}$, qui vérifient deux équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, du second ordre. L'auteur établit ces équations, ainsi que leurs solutions fondamentales, suivant le procédé employé par M. Appell pour les polynomes $U_{m,n}$ d'Hermite.

Goursat (*E.*). — Sur le problème de Bäcklund (547-550).

Ce problème consiste à déterminer deux multiplicités d'éléments de contact, qui

se correspondent de telle sorte qu'entre les éléments correspondants il existe quatre relations distinctes ; l'auteur remarque qu'il se ramène à trouver les multiplicités intégrales à 2 dimensions d'un système de Pfaff à 6 variables.

Il en déduit des théorèmes remarquables sur les transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre, dites de Bäcklund.

Cartan (*E.*). — Sur les variétés de Riemann à 3 dimensions (550-551).

Une variété à 3 dimensions, d'un espace euclidien à n dimensions, est dite de Riemann si son ds^2 est de courbure constante et égale à $+1$. L'auteur fait de ces variétés une étude parallèle à celle des variétés de Beltrami, étudiées dans sa Note précédente (*voir* plus haut).

Giraud (*G.*). — Sur le rattachement à la théorie des fonctions hyperabéliennes d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, avec généralisation à un nombre quelconque de variables (627-629).

L'équation

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)^2=e^u,$$

déjà rencontrée par l'auteur dans l'étude des groupes hyperfuchsiens, admet une intégrale uniforme sur la surface fondamentale d'un groupe hyperabélien; l'auteur donne l'expression de cette intégrale et indique divers groupes qui se prêtent à la construction de fonctions u, analogues à la précédente, et satisfont à une équation du second ordre à n variables.

Angelesco (*A.*). — Sur l'approximation simultanée de plusieurs intégrales définies (629-631).

Si, pour calculer $\int_a^b f(x)\,k(x)\,dx$ (k gardant un signe constant), on remplace $f(x)$ par un polynome $\varphi(x)$ qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$ pour n valeurs de x entre a et b, on obtient une valeur approchée de l'intégrale, étudiée par Gauss, qui a donné le moyen d'obtenir ainsi la meilleure approximation.

L'auteur étend la méthode de Gauss, sous la forme que lui a donnée M. Appell, au cas où l'on a plusieurs intégrales dont on veut calculer simultanément la meilleure approximation.

Riquier. — Sur une propriété des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables imaginaires (631-633).

L'auteur revient, pour le préciser, sur le théorème qu'il a énoncé au sujet d'une condition suffisante pour qu'une fonction d'un nombre quelconque de variables imaginaires soit identiquement nulle (*Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 598).

Carvallo (*E.*). — Sur l'annulation du coma dans les lentilles (641-644).

L'auteur indique une théorie, pour les calculs des lentilles achromatiques, qui conduit à des formules nouvelles et qui permet l'annulation du coma, sans faire intervenir la formule des sinus d'Abbe.

Gau (*E.*). — Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre (675-678).

L'auteur démontre que : Etant donnée une équation (E) du second ordre, à deux variables indépendantes, si l'on connaît deux équations formant avec (E) un système en involution, pour le même système de caractéristiques, sur toute surface intégrale de (E) les caractéristiques de ce système s'obtiendront par deux quadratures.

Drach (*J.*). — Sur les groupes complexes de rationalité et sur l'intégration par quadratures (743-746).

L'auteur observe que le groupe de rationalité (Γ) d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à n invariables indépendantes, est en général un groupe *complexe*, c'est-à-dire formé d'un noyau (Γ_0) qui est engendré par des transformations infinitésimales au sens de Lie, et d'un groupe fini de transformations permutables avec (Γ_0). Cette remarque entraîne des conséquences importantes dans l'étude des cas de réduction de l'équation ; l'auteur en signale quelques exemples.

En particulier, il en déduit l'existence de catégories nouvelles d'équations différentielles intégrables par quadratures, tandis que les équations connues jusqu'à présent correspondaient au cas où le groupe de rationalité est un groupe de Lie engendré par ses transformations infinitésimales.

Lalesco (*T.*). — Sur les fonctions polygonales périodiques (746-748).

L'auteur désigne ainsi les fonctions dont le diagramme, entre 0 et 2π, est composé de segments rectilignes formant une ligne brisée. Il démontre deux résultats au moyen desquels il est facile de former le terme général du développement de Fourier d'une pareille fonction, et en tire quelques conséquences pour la théorie générale des fonctions continues d'une variable réelle.

Garnier (*R.*). — Solution élémentaire du problème de l'inversion des fonctions elliptiques (748-750).

Étant donnée une intégrale elliptique $J(z)$, de périodes $(2\omega_1, 2\omega_2)$, M. Goursat a démontré que le symbole $p[J(z) \mid 2\omega_1, 2\omega_2]$ est une fonction rationnelle $R(z)$; tout revient à démontrer que R est d'ordre 1. L'auteur le démontre d'abord pour les valeurs très petites du paramètre figurant dans $J(z)$, puis étend ce résultat au cas général au moyen de la transformation de Landen.

Goormaghtigh (*R.*). — Généralisations des théorèmes de Jamet sur la courbure des courbes triangulaires, des courbes et des surfaces tétraédrales symétriques (751-753).

L'auteur énonce une série de propositions qui comprennent comme cas particuliers les théorèmes publiés par Jamet (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 4, *supplément*).

Petrovitch (*M.*). — Détermination spectrale de fonctions (774-776).

L'auteur montre par des exemples qu'une fonction $f(z)$ peut être complètement déterminée dans une région du plan des z par une seule donnée numérique E, et par l'adjonction de quelques conditions complémentaires d'une nature qualitative; dans les exemples cités, ces conditions sont relatives à la qualité arithmétique des coefficients du développement en série de $f(z)$ (nombres entiers inférieurs à 100 par exemple), et le nombre E est une fraction décimale périodique qui intervient justement par l'ordre de succession de ses divers chiffres décimaux.

Humbert (*P.*). — Sur les surfaces de Poincaré d'ordre 6 (776-778).

M. Liapounov a énoncé l'hypothèse qu'il ne peut exister plus d'une surface de Poincaré, correspondant à une vitesse angulaire donnée, au voisinage d'un jacobien critique donné; il n'a pu vérifier cette assertion que pour les surfaces d'ordre 4 et celles d'ordre très grand; l'auteur la vérifie ici pour l'ordre 6.

Drach (*J.*). — Intégration d'une équation aux dérivées partielles de la dynamique des fluides (943-945).

Dans le mouvement d'un fluide, permanent, irrotationnel et parallèle à un plan fixe, le potentiel des vitesses φ satisfait à une équation que l'auteur ramène à la forme

$$(1-p^2)\,r - 2pqs + (1-q^2)\,t = 0.$$

Or cette équation se déduit elle-même, par une transformation simple, de celle des surfaces minima et se ramène à une équation de Darboux à invariants égaux; la détermination de la fonction de Riemann s'effectue au moyen de quadratures.

Buhl (*A.*). — Sur l'extension, aux intégrales multiples, du théorème concernant l'échange de l'amplitude et du paramètre dans les intégrales hyperelliptiques (946-948).

En appelant $P(x)$ un polynome de degré quelconque, la transformation

$$X = \frac{\sqrt{P(x)\,P(y)}}{x-y}, \qquad Y = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{P(y)},$$

appliquée à l'identité $\int_C X dy = \iint_{(S)} d\bar{X}\, dY$, permet d'obtenir une formule dont les applications sont très diverses et très importantes; Hermite en a déduit la possibilité de l'échange de l'amplitude et du paramètre dans les intégrales hyperelliptiques. En partant de formules analogues, mais pour n variables, l'auteur aboutit à une formule qui permet de généraliser les résultats d'Hermite.

Lambert (*A.*). — Sur certains polynomes se rattachant aux coefficients de Laplace (948-949).

Les coefficients b_s^k, qui interviennent dans le développement de la fonction perturbatrice, se calculent au moyen de deux d'entre eux par la relation

$$b_s^{k)} = P_k b_s^{(0} + Q_k b_s^{1} ,$$

P et Q étant des polynomes par rapport à un paramètre η. Ces polynomes satisfont à des relations de récurrence qui permettent de les calculer: l'auteur en indique une très simple, d'où il suit que P_k et Q_k se déduisent de P_{k+1} et Q_{k+1} par les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur de ces deux derniers.

Hamy (*M.*). — Sur la diffraction des images solaires (978-979).

L'auteur indique la position, au point de vue mathématique, de l'étude du bord optique de l'image solaire donnée par une lunette dont l'objectif est réduit, par un diaphragme, à une fente longue et très étroite.

Valiron. — Les propriétés générales des fonctions entières et le théorème de M. Picard (988-991).

Soient une fonction entière $f(z) = \Sigma C_n z^n$, $M(r)$ le maximum de son module pour $|z| = r$; l'auteur démontre que le rapport de $M(r)$ au maximum $A(r)$ de la partie réelle de $f(z)$, pour $(z) = r$, tend vers l'unité lorsque r croît indéfiniment à l'intérieur des intervalles ordinaires. Il en déduit une démonstration nouvelle du théorème de M. Picard ainsi que d'autres conséquences relatives en particulier à la régularité des solutions entières des équations différentielles à coefficients rationnels.

Mesnager. — Courbes définies par des séries. Avantages d'un changement de définitions (991-994).

Soit une courbe définie par $y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi(x, n)$; on définit d'habitude la valeur de y, pour une abscisse donnée, comme limite de $\sum_1^N \varphi(x, n) = f(x, N)$, quand N tend vers l'infini. L'auteur propose de définir la courbe par l'ensemble dérivé des points des courbes $y = f(x, N)$; il montre sur un exemple l'avantage de sa définition, qui permet d'éliminer des singularités tenant à la manière

d'obtenir la limite, c'est-à-dire à la direction des axes de coordonnées, et non à la nature même de la question.

Guichard (*C.*). — Sur une série de surfaces à courbure totale constante telle que leurs lignes de courbure forment un réseau du type pA', $-pB'$ (1017-1022).

L'auteur se propose de déterminer ceux de ces réseaux qui correspondent à une équation intégrable par la méthode de Laplace; ils appartiennent à deux types, dont un seul est étudié ici; l'auteur en déduit le moyen de former des surfaces nouvelles en ramenant ce problème à celui qu'il a traité à la fin de sa Note sur les courbes p fois isotropes (*Comptes rendus*. t. 166, 1918, p. 369).

Fatou (*P.*). — Sur les suites de fonctions analytiques (1024-1026).

Soit une fonction $f(z)$, holomorphe et uniforme dans un domaine D, où elle prend des valeurs distinctes pour des valeurs de z distinctes, sans jamais passer par la valeur a; l'auteur énonce le théorème suivant: *Si l'on désigne par* M *et* m *le maximum et le minimum de* $|f(z)-a|$ *dans un domaine fermé complètement intérieur à* D, *on a* $m > Mq$, q *étant un nombre positif qui ne dépend pas de la fonction* f, *mais seulement de la figure*.

Il énonce également une propriété des suites de fonctions tendant uniformément vers a, et en indique quelques conséquences importantes dans le problème de l'itération des fractions rationnelles.

Julia (*G.*). — Sur les surfaces définies par une propriété cinématique (1026-1028).

M. Eisenhart a démontré que les cylindres et les conoïdes sont les seules surfaces réglées qui puissent être engendrées par le déplacement d'une courbe C, de forme invariable, de façon que tout point de C décrive une droite de la surface. L'auteur montre qu'on peut obtenir facilement ce résultat par une méthode géométrique, basée sur le procédé par lequel Darboux a trouvé les mouvements dans lesquels tous les points d'un solide décrivent des courbes planes.

Vessiot (*E.*). — Sur un invariant intégral de l'Hydrodynamique et sur son application à la théorie de la relativité générale (1065-1068).

L'auteur s'occupe spécialement d'un milieu continu à deux dimensions glissant sur un plan; il montre qu'une certaine intégrale double (μ) sera un invariant intégral du mouvement si l'équation de continuité est vérifiée et dans ce cas seulement. Ce résultat s'étend d'ailleurs aisément à l'espace, en prenant pour (μ) une intégrale triple. En écrivant l'invariance de (μ) dans une variation infinitésimale virtuelle du milieu, on obtient des équations qui permettent d'appliquer le principe d'Hamilton, généralisé par Lorentz, à la recherche des équations du mouvement d'un fluide sans viscosité, dans la théorie de la relativité générale et de la gravitation d'Einstein.

E. Gau.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 3e série, Tome XXIX, 1912 (1).

Garnier (*R.*). — Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes (1-126 et *errata* p. 588).

Thèse analysée dans ce *Bulletin*, t. XXXVI, 1912, première Partie, p. 112.

Villat (*Henri*). — Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle (127-197).

Dans une première Partie est traité le cas général du mouvement plan, discontinu, permanent, irrotationnel, que peut prendre un fluide dans un canal donné contenant un obstacle donné. Les méthodes employées sont analogues à celles qui interviennent dans un autre Mémoire du même auteur (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXVIII). Une deuxième Partie est consacrée à l'étude plus approfondie de l'intégrale générale du problème. Dans une troisième Partie est exposée une méthode convenant spécialement au cas où le mouvement est symétrique par rapport à un axe : les fonctions elliptiques de Jacobi s'introduisent alors d'elles-mêmes, au lieu de celles de Weierstrass.

Vergne (*H.*). — Sur un cas particulier de développement d'une fonction en série de fonctions données à l'avance (199-208).

L'auteur démontre que : *Étant donnée une suite fermée de fonctions périodiques de périodes* 1, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_\nu(x)$, ... *possédant en tous points des dérivées premières et secondes développables en séries de Fourier uniformément convergentes, si le système des dérivées premières est orthogonal, toute fonction périodique* $f(x)$ *de même période* 1, *admettant une dérivée première de carré intégrable, est développable suivant les fonctions* $\varphi_\nu(x) - \int_0^1 \varphi_\nu(\xi)\,d\xi$ *en une série absolument et uniformément convergente.* Il donne ensuite une application à la théorie des ondes liquides par émersion.

Vessiot (*E.*). — Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets (209-278).

Un système complet (A)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLII, 1918, 2e Partie, p. 75.

étant donné, M. Vessiot introduit le groupe (g) des transformations en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qui admettent pour invariant chaque solution de (A), et le groupe (G)' des transformations qui laissent invariant (A), en permutant ses solutions (ou ses caractéristiques).

Donner (A), c'est donner les équations de définition de (G). Intégrer (A), c'est trouver celles de (g). L'intégration de (A) est donc un cas particulier du problème suivant : étant données les équations de définition d'un groupe, trouver celles d'un de ses sous-groupes invariants.

Un système (A) sera dit *réductible* ou *spécial* dans un domaine de rationalité (R) s'il existe un groupe *intermédiaire* [contenu dans (G) et contenant (g)] dont les équations de définition sont rationnelles dans (R). Le groupe *spécifique* est le plus petit de ces groupes intermédiaires. Le groupe de *rationalité* est celui qui exprime la loi d'échange des caractéristiques de (A) par le groupe spécifique.

M. Vessiot parvient à construire les *types de systèmes complets réductibles*. Il montre l'équivalence entre sa notion de réductibilité et celle de M. Drach.

L'auteur parvient encore à des résultats intéressants par l'introduction des systèmes complets *prolongés* issus de (A). Enfin il étudie la réduction du groupe spécifique par voie d'*adjonction*.

Ce Mémoire traite surtout le cas où les groupes de rationalité sont *infinis*.

Alezais (*R.*). — Sur la composition de transformations linéaires de fonctions Θ (279-304).

Ce Mémoire a pour but d'apporter quelques compléments à la Thèse de l'auteur. Dans cette Thèse ont été calculées certaines transformations de fonctions Θ abéliennes à trois variables. M. Alezais ramène ici ces transformations à quatre transformations fondamentales ; il donne en outre des méthodes pour calculer un produit quelconque de ces quatre transformations. Quelques résultats complémentaires terminent le travail.

Delassus (*Ét.*). — Sur les liaisons et les mouvements des systèmes matériels (305-369).

M. Delassus établit une distinction fondamentale des liaisons en *directes* ou *indirectes*, suivant qu'elles ne nécessitent pas ou qu'elles nécessitent l'intervention d'un système auxiliaire. Dans ce dernier cas, on suppose souvent que les masses des parties de ce dernier système sont nulles, et, dans l'application du principe des travaux virtuels, on élimine les paramètres correspondants M. Delassus montre, par des exemples simples, que ce procédé n'est pas toujours légitime, et que les mouvements réels peuvent ou bien être plus généraux que ceux fournis par ce procédé, ou bien même être complètement différents de ces derniers. Alors s'introduit la distinction des liaisons réalisées en *parfaites* ou *imparfaites* : la réalisation d'une liaison analytique donnée est parfaite, si les équations d'ordre s indépendantes des dérivées d'ordre s des paramètres du système auxiliaire sont, quel que soit s, les mêmes dans la liaison donnée et dans la liaison réalisée. Pratiquement, il suffit de faire la vérification pour $s = 2$, la liaison étant du premier ordre. M. Delassus admet que toute liaison finie ou linéaire du premier ordre (par rapport aux paramètres)

admet au moins une réalisation linéaire parfaite. Les liaisons non linéaires, considérées par M. Appell, n'admettent, selon les raisonnements de M. Delassus, aucune réalisation parfaite.

L'auteur étudie alors les réalisations d'une liaison donnée et les mouvements obtenus dans ces différentes réalisations.

Roy (*L.*). — Recherches sur la dynamique du fil flexible (371-429).

Ce Mémoire est une étude du mouvement des fils flexibles, en tenant compte de la viscosité et de la température. Il y est fait grand usage des méthodes de M. Duhem relatives aux fluides. Après un premier Chapitre consacré à l'établissement des équations générales du mouvement, l'étude des discontinuités du premier ordre et d'ordre supérieur forme la matiere de trois Chapitres. Un dernier Chapitre est consacré aux petits mouvements autour d'une position d'équilibre : le problème de la corde vibrante y est complètement traité, en tenant compte de la viscosité.

Bernstein (*S.*). — Sur les équations du calcul des variations (431-485).

Dans ce travail, les équations différentielles, ou aux dérivées partielles, du calcul des variations sont considérées directement; le calcul des variations n'intervient guère que comme application.

Dans une première Partie sont étudiées les équations différentielles, en nombre quelconque, qui interviennent dans ces problèmes. On y trouve diverses propositions sur le nombre des *trajectoires* de ces équations qui passent par deux points donnés. Une nouvelle démonstration du théorème de M. Painleve sur les équations

$$y''_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans le cas où $|f_i| < k(y'^2_1 + \ldots + y'^2_n)$, k ne dépendant que de $x, y_1, \ldots, y_n$, résulte aussi de cette étude.

Dans une deuxième Partie sont étudiées les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, du type elliptique. L'auteur revient sur des propositions démontrées antérieurement par lui, notamment dans les *Mathematische Annalen*, t. LXIX. Certains problèmes aux limites (analogues à celui de Dirichlet) conduisent à des conclusions différentes suivant que le contour est convexe ou non. Les problèmes d'extrémum correspondants, relatifs à des intégrales doubles, peuvent, par suite, n'avoir pas de solution.

Montel (*P.*). — Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (487-535).

Les familles *normales* sont, par définition, des familles de fonctions holomorphes dans un domaine D, et telles que de toute suite infinie de fonctions

de la famille, on puisse extraire une suite nouvelle uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D. Un des exemples les plus généraux de familles normales que M. Montel donne dans le premier Chapitre de ce travail est celui des familles de fonctions ne prenant pas la valeur 0 ni la valeur 1 dans D. Les familles de fonctions ne prenant qu'un nombre fini de fois les valeurs 0 et 1 ont des propriétés voisines.

Dans le Chapitre II sont retrouvés, à l'aide de ces notions, les théorèmes de M. Picard sur les valeurs que peut prendre une fonction entière, ou une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel isolé, ainsi que les généralisations dues à MM. Lindelöf, Landau, Schottky, P. Lévy. M. Montel ajoute lui-même d'autres généralisations, relatives par exemple à des ensembles discontinus de points singuliers.

Dans un dernier Chapitre est étudiée la convergence des séries de fonctions holomorphes. Différentes propositions, dues à plusieurs auteurs y sont rattachées à un même théorème :

Si une suite infinie de fonctions, appartenant à une famille normale dans D, *converge en une infinité de points intérieurs à* D *dans leur ensemble, elle converge dans* D; *et la convergence est uniforme dans l'intérieur de* D.

Boussinesq (*J.*). — Complément à un récent Mémoire intitulé : « Sur les principes de la Mécanique et sur leur applicabilité à des phénomènes qui semblent mettre en défaut certains d'entre eux » (53$_7$-58$_7$).

Le Mémoire auquel le titre renvoie figure dans le Tome XXVII du même Recueil. M. Boussinesq s'attache d'abord à trouver des images illustrant pour notre esprit le fait de l'action instantanée à distance de la pesanteur et des forces moléculaires, et le fait que les équations de la Mécanique sont du second ordre. Il insiste sur les erreurs que peuvent entraîner les hypothèses expérimentales approchées, et, dans une Partie plus particulièrement mathématique, donne deux exemples relatifs au mouvement dans un fluide visqueux, l'un d'une sphère, l'autre d'un cylindre indéfini : les paradoxales conclusions obtenues tiennent, d'après M. Boussinesq, à l'hypothèse de la conservation des volumes, et peut-être à celle des frottements intérieurs fonctions des seules vitesses. Enfin M. Boussinesq étend au calcul de la résistance éprouvée par un ellipsoïde dans une translation uniforme au travers d'un fluide visqueux une méthode qui a réussi pour la translation variée d'une sphère.

3e série, Tome XXX, 1913.

Riquier (*C.*). — Sur l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions données le long d'un contour (9-52).

Ces conditions sont relatives aux valeurs prises par les intégrales et certaines de leurs dérivées calculées suivant les courbes d'une famille donnée coupant

sans contact le contour donné. Les intégrales doivent seulement être analytiques et régulières au voisinage du contour.

Les équations, dont on cherche les intégrales de cette nature, sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles, en nombre égal à celui des fonctions inconnues, linéaires, et d'ordres quelconques; les variables indépendantes sont au nombre de deux.

L'auteur introduit une forme algébrique binaire dont le degré est la somme des ordres $k_1, k_2, \ldots, k_g$ du système par rapport aux fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$. Si les droites représentées par la forme sont toutes imaginaires, le système proposé admet un et un seul système d'intégrales prenant ainsi que leurs $k_1 - 1, k_1 - 1, \ldots, k_g - 1$ premières dérivées suivant la direction donnée, des valeurs données, le contour étant bien entendu régulier, ainsi que les coefficients du système et les valeurs données.

Potron (*M.*). — Quelques propriétés des substitutions linéaires à coefficients ≥ 0, et leur application aux problèmes de la production et des salaires (53-76).

Ce travail comporte une partie purement mathématique et une partie concernant l'application. La première traite de l'extension, au cas où les coefficients sont $\geqq 0$, de curieuses propositions, dues à MM. Perron et Frobenius, concernant la recherche de formes linéaires à coefficients > 0 qu'une substitution donnée à coefficients > 0 multiplie par un facteur constant. La seconde donne un moyen de reconnaître si l'on peut trouver un régime de production, de consommation et de salaires pouvant, dans des hypothèses données, rentrer dans diverses catégories qualifiées par l'auteur de *satisfaisantes*, *simplement satisfaisantes*, *semi-satisfaisantes*, ou d'*effectivement satisfaisantes*.

Bachelier (*L.*). — Les probabilités cinématiques et dynamiques (77-119).

Ce Mémoire traite des problèmes suivants :

Problèmes cinématiques. — Un mobile ayant une vitesse v de grandeur donnée et de direction variant au hasard, quelle probabilité y a-t-il pour qu'à l'instant t il se trouve dans un élément de volume $dx\,dy\,dz$ de position (x, y, z) donnée? Même question, la vitesse étant fonction donnée de t. Questions analogues quand on donne simplement la distance à l'instant t du mobile à son point de départ, ou quand le mobile se meut dans un plan ou sur une droite. Cas où la vitesse a une composante entièrement donnée (passant par un point fixe et proportionnelle à la distance) et une composante de grandeur donnée et de direction variant au hasard.

Problèmes dynamiques. — Un point étant soumis à une force de grandeur donnée et de direction variable au hasard, probabilité pour que, à l'instant t, sa vitesse, ou sa position, ou sa vitesse et sa position coïncident avec des éléments donnés; cas où le milieu résiste proportionnellement à la vitesse; étude faite successivement sur la droite, dans le plan, dans l'espace. Problèmes concernant un corps solide.

Nielsen (*N.*). — Recherches sur le développement d'une fonction analytique en série de fonctions hypergéométriques (121-171).

Étude de développements tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n F_n(x),$$

où les a_n sont des constantes, et où

$$F_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_{n+s}}{s!\,A_n} x^{n+s}, \qquad A_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+n)\ldots\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta_1+n)\ldots\Gamma(\beta_q+n)} \qquad (p \leqq q+1),$$

les $p+q$ constantes α et β n'étant pas entières négatives. Étude des séries

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n G_n(x),$$

où les b_n sont des constantes, et où

$$G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \frac{A_{n+s}}{A_n} x^{n+s} \qquad (p \leqq q).$$

Clairin (*J.*). — Sur quelques points de la théorie des transformations de Bäcklund (173-192).

Ce Mémoire contient quelques résultats à ajouter à ceux que l'auteur a déjà publiés dans sa Thèse (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XIX, *suppl.*) et dans un autre travail (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXVII). Le plus important est le suivant : dans l'infinité de transformations, représentées analytiquement par quatre équations entre les coordonnées de deux systèmes d'éléments du premier ordre, dont dérive une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, il y a toujours une transformation de Bäcklund de première espèce, sauf si l'équation donnée admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire.

Le Roux (*J.*). — Recherches sur la géométrie des déformations finies (193-245).

Ce Mémoire contient l'extension aux déformations finies de l'étude des éléments du second ordre (torsion et flexion) dans la déformation des milieux continus, étude qui avait été faite antérieurement (*Ann. Éc. Norm.*, t. XXVIII, 1911) pour les déformations infinitésimales. Ce travail a un caractère exclusivement géométrique, bien que l'auteur ait eu en vue des applications mécaniques ultérieures.

Picard (*E.*). — Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes (247-253).

Il s'agit des fonctions possédant un théorème de multiplication, que M. Picard a étudiées dans les *Acta mathematica* (t. XVIII et XXIII). M. Picard précise ici quelques points relatifs aux fonctions d'une variable, et indique sur un exemple les difficultés qui se présentent avec les fonctions de deux variables.

Boutroux (*P.*). — Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre (255-375).

Nous n'avons ici que le début (les trois premières Parties) de ce Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (1912).

La première Partie, relative aux équations de Riccati, s'attache particulièrement aux équations

$$(\mathrm{A}) \qquad y' = y^2 + x,$$

$$Y' + \frac{\mu}{\mu + 2}\frac{Y}{X} = Y^2 + 1,$$

dont la seconde s'intègre au moyen des fonctions de Bessel, et dont la première (A) se ramène à la seconde en faisant $\mu = 1$. M. Boutroux démontre que les intégrales Y de la seconde équation sont *asymptotes* aux fonctions tang $(X - X_0)$, ce mot *asymptote* ayant un sens bien précis.

Dans la deuxième Partie sont étudiées des fonctions asymptotes aux fonctions elliptiques, ce qui éclaire l'allure des intégrales de la première équation de M. Painlevé.

La troisième Partie est relative aux *intégrales tronquées*, c'est-à-dire à celles qui ont des pôles rejetés à l'infini, et qui sont particulièrement importantes dans cette étude.

Rémoundos (*G.-J.*). — Sur les fonctions entières et algébroïdes; généralisation du théorème de M. Picard dans la direction de M. Landau (377-393).

Dans une première Partie l'auteur donne, pour les fonctions entières qui admettent une valeur exceptionnelle, au sens de M. Picard, différente de zéro, une proposition concernant le module minimum qu'il étend aux fonctions algébroïdes finies à distance finie; cette proposition est plus précise que celle de M. Blumenthal relative aux fonctions entières quelconques. Dans une deuxième Partie sont étendus aux fonctions algébroïdes finies à distance finie les résultats de MM. Borel et Blumenthal sur l'égalité des degrés de croissance du logarithme du maximum de la partie réelle, du logarithme du minimum de la partie réelle et du logarithme du module. Enfin, l'auteur étend la généralisation du théorème de M. Picard par M. Landau au cas où $z = 0$ est un point critique de la fonction.

Rados (*G.*). — Sur la théorie des congruences de degré supérieur (395-412).

L'auteur donne les conditions pour que deux congruences ayant pour

module un nombre premier p aient une racine commune : il y a p conditions, dont chacune est qu'une somme de déterminants d'ordre $p-1$ soit congrue à 0. Ensuite sont considérées les congruences dont le module est une puissance d'un nombre premier; toutes les congruences peuvent se ramener à des congruences de ces types. M. Rados étend aussi ses raisonnements à un nombre quelconque de congruences.

Haag (*J.*). — Sur certains réseaux sphériques et les systèmes triples orthogonaux qui en dérivent (413-462).

Cette étude concerne les réseaux appelés *réseaux* (σ) dans la Thèse de l'auteur, et qui sont les réseaux sphériques pouvant servir de représentation sphérique commune à toutes les surfaces d'une famille de Lamé. M. Haag étudie notamment les réseaux (σ) comprenant une famille de cercles, les réseaux (σ) isothermes, et les réseaux (σ) représentations sphériques de surfaces à courbure totale constante.

Picard (*E.*). — L'œuvre de Henri Poincaré (463-482).

Description de l'œuvre mathématique, physique, littéraire et philosophique du grand géomètre.

Picard (*E.*). — Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes (483-487).

Résumé d'une leçon faite par M. Picard sur cette question; la méthode suivie part du point de vue de M. Schottky, mais en se rapprochant de la méthode employée par M. Picard dans son *Traité d'Analyse*.

Delassus (*Et.*). — Sur les mouvements des systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres et soumis à des liaisons d'ordre quelconque (489-520).

M. Delassus appelle *ordre d'une liaison*, l'ordre n le plus élevé des équations différentielles qui définissent la liaison, et dont toutes les autres équations différentielles satisfaites par la liaison peuvent se déduire par dérivation.

Recherchant si l'on peut avoir la conception, comme mouvements limites de mouvements obtenus au moyen de réalisations physiques de plus en plus parfaites de la liaison, de mouvements où ne reste plus trace de ces réalisations, et qui sont complètement déterminés par les valeurs initiales des paramètres et de leurs dérivées, quelles que soient les forces agissantes, l'auteur montre que cela n'a lieu que pour les liaisons du second ordre au plus, à condition qu'elles soient linéaires, du premier ordre si elles ne sont pas linéaires. M. Delassus étudie ensuite les différentes réalisations de liaisons données.

Cotton (*E.*). — Sur l'instabilité de l'équilibre (521-561).

M. Cotton démontre l'impossibilité d'un équilibre stable dans une position d'équilibre où la fonction des forces n'est pas maximum, en supposant que le

système matériel dépend de deux paramètres seulement, que la position d'équilibre est isolée, et que la fonction des forces et la force vive sont holomorphes dans le voisinage de cette position; aucune restriction n'est apportée relativement à la singularité de la ligne de niveau passant par la position d'équilibre.

L'auteur utilise des considérations sur l'ordre infinitésimal d'une fonction de deux variables dans un *onglet* (sorte d'angle à côtés curvilignes ayant son sommet à l'origine).

GEORGES GIRAUD.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.
Série III, Tome XXI, 1913 (1).

Wilczynski (*E.-J.*). — Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi [Recherches géométriques à propos du problème des trois corps] (1-31).

L'auteur étudie des questions telles que la suivante : l'une des surfaces réglées decrites par les droites qui joignent deux à deux les trois corps peut-elle être développable, se réduire à un cylindre?

Les résultats obtenus le conduisent à reprendre l'étude des solutions isoscèles du problème des trois corps pour retrouver, à l'exclusion de toute autre, les solutions de Lagrange (le triangle étant alors équilatéral) et celles de Fransèn (deux des masses égales).

Hahn (*Hans*). — Ueber die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat [Sur la représentation d'un segment sur un carré] (33-55).

On sait que, si cette représentation est biunivoque, elle ne peut être continue; mais on peut, comme le montre l'auteur, faire en sorte que l'abscisse du point du carré varie continûment avec le point du segment [tout revient à construire une $\varphi(t)$ continue ne prenant que les valeurs comprises entre 0 et 1 et chacune sur un ensemble fermé ayant la puissance du continu].

L'auteur étudie ensuite les représentations continues (analogues à celles de Peano) : les points du carré qui correspondent à au moins deux points du segment forment un ensemble ayant la puissance du continu et il existe un ensemble partout dense de points du carré correspondant à trois points du segment. Exemples de telles représentations.

Kœbe (*Paul*). — Das Uniformisierungs theorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nicht euclidische Geometrie

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLIII, 1919, 2e Partie, p. 67.

[Le théorème d'uniformisation et sa signification pour la théorie des fonctions et la géométrie non euclidienne] (57-64).

Considérations sur les diverses formes que peut prendre le concept de multiplicité générale de Riemann, en particulier relations avec les groupes de substitutions (T-Gruppe) qu'introduit la théorie de l'uniformisation; ces groupes s'interprètent comme groupes de mouvements de la géométrie non euclidienne.

Stekloff (*W.*). — Sur une formule générale d'Analyse et ses diverses applications (65-120).

La formule est la suivante :

$$f(x+0)-f(x+h-0)=\frac{4}{h}\sum_{0}^{\infty}{}_{k}\int_{x}^{x+h} f(\alpha)\cos\frac{(2k+1)\pi(x-\alpha)}{h}\,d\alpha.$$

L'auteur l'établit d'abord de façon élémentaire (en supposant l'existence de f' et f''); il en donne deux autres démonstrations, l'une basée sur la théorie des suites fermées de fonctions orthogonales, l'autre sur un théorème de M. Jordan.

Il en déduit un certain nombre de formules sommatoires, en particulier les formules classiques de Poisson, Dirichlet et Euler.

En particularisant dans ces formules la fonction $f(x)$, il en tire les propriétés fondamentales des nombres et polynomes de Bernoulli, de la série de Lambert, des fonctions Γ d'ordre supérieur, des fonctions ζ de Riemann, du logarithme intégral, etc. Il obtient un grand nombre de développements semi-convergents du genre de la série de Stirling; quelques exemples en montrent l'intérêt pour le calcul numérique.

Forsyth (*A.-R.*). — The range of minimal Surfaces providing a minimum area [Les surfaces minima fournissant une aire minimum] (121-142).

Étude de la variation seconde; étude des lignes conjuguées, analogues aux foyers conjugués dans le cas de l'extrémum d'une intégrale simple.

Pincherle (*Salvatore*). — Sull' operazione aggiunta di Lagrange [Sur l'opération adjointe de Lagrange] (143-151).

Étant donnés deux espaces linéaires généraux S et S', soit une opération P qui, à chaque couple formé par un élément a de S et un élément a' de S', fait correspondre un élément (a, a') d'un autre espace S''. L'adjointe $\overline{A}$ (par rapport à P) d'une opération linéaire $A(a)$ sera définie par l'égalité

$$(A(a), a') = (a, \overline{A}(a')).$$

Cas particuliers et applications.

Carathéodory (*C.*). — Sur les points singuliers du problème du calcul des variations dans le plan (153-171).

L'auteur a précédemment étudié le faisceau des extrémales fortes passant par un point [1], si ce point est régulier; il nomme ainsi un point pour lequel les deux invariants $\Psi(x, y)$ et $\Omega(x, y)$ sont tous deux différents de zéro. Les résultats établis ici permettent d'étendre ces raisonnements aux points singuliers pour lesquels Ω est nul, Ψ restant différent de zéro; l'allure des extrémales dépend essentiellement de la forme, au voisinage du point considéré, de la courbe $\Omega = 0$.

Levi (*Eugenio-Elia*). — Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle variazioni [Sur les critères suffisants pour le maximum et le minimum dans le Calcul des variations] (173-218).

L'auteur présente la méthode qu'il emploie pour obtenir, sans faire usage de la notion de champ d'extrémale, les conditions suffisantes de l'extrémum, comme un retour aux méthodes de Legendre et Jacobi; mais il importe de scinder la variation totale en portions qui soient d'allure infinitésimale différentes quand on fait tendre vers zéro seulement la distance maxima des points de l'extrémale et de la courbe variée.

Dans le cas de l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx,$$

l'auteur y parvient grâce à la formule

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} E(x, y; \eta_1' + z_1 u', y')\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 z_1^3 + \lambda_2 u z_1^2 z_1')\, dx$$

donnant la variation totale de I entre l'extrémale $\eta_1(x)$ et la courbe variée $y(x)$, avec

$$y - \eta_1 = z = u z_1,$$

u étant solution de l'équation de Jacobi.

La méthode ainsi obtenue permet, dans le cas de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', \ldots, y^{(p)})\, dx,$$

d'aller plus loin que la méthode de Weierstrass.

Schur (*Friedrich*). — Ueber die berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz [Sur les réseaux de rayons tangents à une congruence] (219-224).

Étude analytique.

---

[1] *Math. Ann.*, t. 62, p. 449.

Borel (*Émile*). — Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels (225-232).

En modifiant l'équation différentielle d'un résonateur linéaire,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = a^2,$$

par adjonction au second membre d'un terme λt, l'allure de l'intégrale se trouve entièrement modifiée, quelque petit que soit λ : elle cesse d'être périodique. L'auteur étudie de même le cas où le mouvement n'est pas linéaire.

Ces exemples très frappants d'équations différentielles, où une modification infiniment petite change entièrement l'allure des solutions, peuvent se rattacher à l'étude de l'émission ou absorption d'énergie par un résonateur.

Stéphanos (*C.*). — Sur une propriété caractéristique des déterminants (233-236).

Il s'agit du théorème qui donne le produit de deux déterminants.

Lamb (*H.*). — On some cases of waves-motion on deep water [Sur quelques cas de mouvements d'ondes en eau profonde] (237-250).

Les mouvements étudiés sont à deux dimensions, dans un plan vertical. L'auteur reprend d'abord, avec quelques simplifications, les résultats de Cauchy et de Poisson sur les ondes produites par une perturbation locale à la surface. Il étudie ensuite l'influence d'une source intérieure, de potentiel des vitesses

$$-\frac{1}{2\pi}\log r\, e^{i\sigma t},$$

et enfin les ondes dues au mouvement d'un cylindre horizontal submergé (mouvement uniforme perpendiculairement à la direction des génératrices).

Hadamard (*Jacques*). — La construction de Weierstrass et l'existence de l'extrémum dans le problème isopérimétrique (251-287).

Les problèmes isopérimétriques étudiés par l'auteur sont ceux pour lesquels les intégrales considérées sont :

$$(a) \qquad I = \int f(x, y, x', y')\, dt,$$

la figurative correspondante étant, dans la région considérée, une courbe fermée convexe entourant l'origine;

$$(b) \qquad J = \int P\, dx + Q\, dy,$$

intégrale curviligne ordinaire.

Les difficultés du problème isopérimétrique (extrémum d'une des intégrales, l'autre ayant une valeur donnée) commencent dès l'étude de la construction d'une extrémale joignant deux points voisins A et B. L'auteur développe ici la méthode qu'il a indiquée précédemment [1] et qui permet de surmonter ces difficultés. Je rappelle qu'à la base de cette méthode est l'étude de l'allure des extrémales libres [solutions de l'équation

$$A(x''y' - y'x'') = \varphi(x, y, x', y') - l\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)]$$

pour les grandes valeurs du paramètre l.

Bortolotti (*Ettore*). — Espressioni indeterminate [Expressions indéterminées] (289-316).

L'auteur établit, pour la limite du quotient de deux infiniment petits ou infiniment grands simultanés, les formules

$$\lim \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{f_{r+1} - f_r}{\varphi_{r+1} - \varphi_r},$$

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \begin{cases} \lim\limits_{x=a} \dfrac{1}{a-x} \displaystyle\int_x^a \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,dx & \text{(pour } a \text{ fini)}, \\ \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1}{x-x_0} \displaystyle\int_{x_0}^x \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,dx & \text{(pour } a \text{ infini)}. \end{cases}$$

Lauricella (*Giuseppe*). — Sopra l'Algebra delle funzioni permutabili di seconda specie [Sur l'Algèbre des fonctions permutables de deuxième espèce] (317-351).

L'auteur résout d'abord l'équation

$$\overset{n}{\mathrm{K}}(x, y) = \mathrm{H}(x, y),$$

$\overset{n}{\mathrm{K}}$ étant le $n^{\text{ième}}$ noyau itéré d'un noyau symétrique inconnu K, H étant un noyau symétrique donné. Il en déduit la solution d'équations intégrales de deuxième et troisième degré; par exemple, pour que l'équation du second degré

$$\overset{2}{\mathrm{K}}(x, y) + \ddot{p}\,\ddot{\mathrm{K}}(x, y) + q(x, y) = 0$$

ait des solutions à fonctions fondamentales toutes réelles, il faut et suffit que les fonctions p et q soient permutables et que la série $\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|}$ formée par les valeurs fondamentales de $\overset{2}{p} - 4q$ converge.

JOSEPH PÉRÈS.

---

[1] *Sur quelques questions de calcul des variations* (*Annales École Normale supérieure*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 203-221).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.
6e série, Tome V, 1909 (1).

Séguier (*J.-A. de*). — Sur les formes bilinéaires et quadratiques (1-64).

Le R. P. de Séguier poursuit dans ce Mémoire les recherches de MM. Jordan, Lœwy et surtout Dickson sur les formes quadratiques que laissent invariantes soit une substitution donnée dans le champ des nombres complexes ordinaires, ou dans le champ de Galois défini par une équation à coefficients entiers, irréductible mod p, soit dans un champ quelconque fini.

Malgré certaines différences, la méthode employée ne pouvait différer au fond de celle de M. Jordan; elle conduit, notamment, à une démonstration nouvelle du théorème de M. Jordan sur les substitutions paires qui conservent une forme quadratique donnée.

Bounitzky (*E.*). — Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires (65-125).

L'auteur construit d'abord les fonctions de Green pour un système d'équations linéaires du premier ordre, puis il applique les résultats trouvés à la théorie de la fonction de Green d'une équation linéaire ordinaire de l'ordre n.

Dans cette dernière théorie, il discute en détail deux questions : il explique le rôle que jouent les autofonctions adjointes de M. Schmidt quand la fonction de Green n'est pas symétrique, et il établit les conditions nécessaires et suffisantes pour la symétrie de la fonction de Green.

Les applications portent principalement sur les autofonctions adjointes; $\varphi_m(x)$, $\chi_m(x)$ sont respectivement *autofonctions en x et en ξ* par rapport à un noyau $K(x, \xi)$, si elles satisfont aux équations

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\varphi_m(\xi)\, d\xi,$$

$$\chi_m(\xi) = \lambda_m \int_a^b K(x, \xi)\chi_m(x)\, dx,$$

λ_m étant une autovaleur correspondante; les fonctions $\varphi_{1,m}(x)$, $\psi_{1,m}(x)$ sont respectivement des *autofonctions adjointes en x et en ξ* par rapport à un noyau $K(x, \xi)$, si elles satisfont aux équations

$$\varphi_{1,m}(x) = \lambda_{1,m} \int_a^b K(x, \xi)\psi_{1,m}(\xi)\, d\xi,$$

$$\psi_{1,m}(x) = \lambda_{1,m} \int_a^b K(x, \xi)\psi_{1,m}(x)\, dx,$$

$\lambda_{1,m}$ étant une autovaleur correspondante.

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. LXIII, 1919, 2e Partie, p. 18.

L'étude est limitée au cas où le déterminant des conditions relatives aux limites linéaires homogènes est différent de zéro; pour l'équation différentielle linéaire du second ordre adjointe à elle-même, seulement, le cas où ce déterminant est différent de zéro est étudié.

Petrini (*H.*). — Les dérivées premières et secondes du potentiel logarithmique (127-223).

Le Chapitre I de ce Mémoire est une suite de propositions et d'identités importantes concernant les dérivées du potentiel logarithmique

$$V(x, y) = \int \rho \log \frac{1}{r} \, dw,$$

d'une surface plane; x, y sont les coordonnées rectilignes d'un point P_0 situé ou non dans le plan, dont Q est un point, et dw l'élément de surface; r est la distance P_0Q; ρ est une fonction finie et intégrable des coordonnées de Q; l'intégration s'étend à tous les éléments de l'aire considérée; on suppose cette aire finie.

La fonction V est toujours finie et continue. Elle est finie et continue en même temps que sa dérivée première, pour une aire finie, si la fonction ρ est intégrable et reste toujours numériquement plus petite qu'une quantité fixe finie.

Les propositions analogues concernant les dérivées d'ordre supérieur affectent des formes précises, mais compliquées. Elles renferment comme cas particulier, ainsi qu'on devait s'y attendre, l'équation de Poisson.

Au Chapitre II est faite l'étude du potentiel logarithmique d'une ligne plane; la proposition suivante, qui a d'intéressantes conséquences, est établie :

La condition nécessaire et suffisante pour que le potentiel logarithmique ait, au point P_0, une dérivée finie dans la direction ds est que la quantité

$$\lim_{a=0} \int_h^a \sum \sigma u \frac{dr}{r}$$

soit finie;

On suppose que μ_0 est une masse finie répandue de manière qu'on puisse écrire

$$d\mu = dr \sum_u \sigma(r, u), \qquad \text{avec} \qquad u = \cos(r, ds),$$

$d\mu$ étant l'élément de masse en un certain point Q, r la distance P_0Q de Q à un point fixe P_0, ds étant un élément de ligne émanant du point P_0 et $\Sigma|\sigma|$ une quantité qui reste plus petite qu'une constante finie quelle que soit la valeur de r.

Viennent ensuite, aux Chapitres III, IV, l'étude de la dérivée seconde du potentiel logarithmique d'une ligne plane et d'une double ligne.

Maillet (*E.*). — Sur certains systèmes d'équations différentielles (225-262).

M. Maillet étudie les systèmes d'équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

où

$$X'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_i) + Y_i = X_i - Y_i,$$

$\varphi_i = X_i$ étant un polynome homogène de degré $p > 1$, Y_i une fonction de $x_1, \ldots, x_i$ dont les termes sont tous de degré $> p_x$.

Il définit des cas assez étendus où, pour $t \geq 0$, les solutions réelles, de valeurs initiales assez voisines de $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ sont de la forme

$$x_1 = \ldots = x_i = 0, \qquad x_j = (\rho_j + \varepsilon_j)(a + t)^{\frac{1}{1-p}} \qquad (j = i+1, \ldots, n),$$

a étant un paramètre arbitraire positif ou nul, ρ_j une constante, ε_j ayant pour limite 0, quand t est infini positif.

L'intérêt de ces résultats est de comporter des applications dans l'étude des systèmes de n réservoirs en permettant d'établir, dans des cas très généraux, l'existence d'un régime asymptotique unique, si ces réservoirs ne sont pas alimentés du dehors, ou d'un ou plusieurs régimes permanents limités, s'ils sont alimentés par des débits permanents.

Ils pourraient être étendus à l'étude plus compliquée du régime d'une rivière canalisée.

Hostinsky (*B.*). — Sur quelques figures déterminées par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche (263-292).

Ce Mémoire est une intéressante contribution à la géométrie non euclidienne.

Après avoir rappelé et généralisé quelques définitions connues des déterminations métriques, M. Hostinsky étudie les sphères non euclidiennes circonscrites et inscrites dans des tétraèdres formés ou par quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche ou, par quatre plans osculateurs infiniment voisins; puis il considère quatre cercles et quatre cônes de révolution déterminés par des éléments infiniment voisins.

Comme on pouvait s'y attendre, les formules de la géométrie ordinaire sont des cas limites des formules relatives à la géométrie non euclidienne; ainsi on peut énoncer le théorème suivant, analogue au théorème de Joachimsthal et qui se trouve être également vrai, et en géométrie euclidienne et en géométrie non euclidienne : *soient* (S), (S') *deux surfaces telles que le segment compris sur chaque génératrice g de la surface développable* (D) *circonscrite à* (S) *et* (S'), *entre les points de contact de* (D) *avec* (S) *et* (S'), *ait une longueur constante. Pour que la courbe de contact de* (D) *avec* (S) *soit une ligne de courbure de* (S), *il faut et il suffit que la courbe de contact de* (D) *avec* (S') *soit une ligne de courbure sur* (S').

Adhémar (*R. d'*). — Sur l'application du calcul fonctionnel à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre (293-326).

M. Picard a intégré l'équation

$$s + ap + bq + cz + f = 0 \qquad (a, b, c, f \text{ fonctions de } x, y, \text{ seuls}),$$

où $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ et aussi l'équation plus générale

$$f(x, y, z, p, q) = s,$$

par la méthode des approximations successives. MM Goursat et Hadamard ont étendu les résultats obtenus par M. Picard; M. Goursat, en particulier, a obtenu une solution de l'équation $f(\ldots) = s$, précitée, contenant deux courbes qui se coupent à l'origine et qui ont leurs projections situées dans le premier quadrant.

M. d'Adhémar a trouvé la surface intégrale, contenant trois courbes données, de l'équation du troisième ordre:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\, u = \varphi_2(u),$$

φ_2 contenant des dérivées première et seconde, ce qui le conduit à résoudre, par approximations successives, des équations fonctionnelles et des équations transcendantes du type de Laguerre :

$$f(G_x) = F_x.$$

Dienes (*P.*). — Essai sur les singularités des fonctions analytiques (327-413).

Une fonction analytique quelconque $f(x)$ est déterminée par la suite des coefficients

$$(1) \qquad a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

d'une série de Taylor, sous la seule restriction que $\lim\limits_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right|$ ne soit pas infinie. Toutes les propriétés de la fonction $f(x)$ sont déterminées par cette suite. En particulier, l'allure de la fonction au voisinage d'un point singulier est déterminée par les propriétés limites de la suite (1).

Le problème général de la recherche des singularités est de trouver les relations entre les singularités et les propriétés limites de la suite (1), ou celles des expressions formées à l'aide de cette suite.

M. Dienes donne un certain nombre de relations générales entre les singularités et les propriétés limites de la suite (1).

On sait combien il a été laborieux de préciser les notions aujourd'hui acquises, et fondamentales, de convergence et d'allure, d'abord sur le cercle de convergence, puis au delà.

L'auteur s'occupe d'abord du cercle lui-même : c'est la pierre angulaire de l'édifice, le problème qui se pose en premier lieu étant de représenter le plus simplement possible la valeur de la fonction dans les points réguliers de ce cercle; il donne ici des critères pouvant indiquer l'ordre d'infinitude de $f(x)$.

Vient ensuite un résumé très clair des beaux résultats de M. Hadamard et des compléments dus à MM. Fatou, Riesz et surtout Borel, auteur du premier théorème général qui, ne supposant rien sur les coefficients a_n donne cepen-

dant une relation très précise entre ces coefficients et l'allure de la fonction aux points x_0 du cercle de convergence.

De là, on passe naturellement au polygone de sommabilité et à l'étoile de Mittag-Leffler.

Une autre partie du Mémoire est consacrée à l'étude des pôles sur le cercle de convergence, à l'aide des moyennes arithmétiques, puis à celle des pôles sur le polygone de sommabilité à l'aide de la fonction exponentielle de M. Borel.

La croissance des fonctions entières et l'étude des points critiques algébriques d'ordre positif termine cet important travail et confirme la remarque de M. Borel relative à l'importance de la fonction exponentielle dans la théorie des fonctions analytiques.

R. de Montessus de Ballore.

ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

3e série, T. XXXI, 1914 (1).

Riesz (*F.*). — Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires (9-14).

Démonstration très simple de ce fait, déjà démontré par l'auteur dans le même Recueil en 1911, que toute opération fonctionnelle linéaire portant sur les fonctions $f(x)$ continues dans (a, b) est représentable par une intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

Boussinesq (*J.*). — Contribution à la théorie de l'action capillaire, avec extension des forces de viscosité aux couches superficielles des liquides, et application notamment au lent mouvement vertical, devenu uniforme, d'une goutte fluide sphérique, dans un autre fluide, indéfini et d'un poids spécifique différent (15-85).

M. Boussinesq commence par introduire la notion de tension superficielle à la surface libre d'un liquide, ou à la surface séparative de deux liquides, et la notion de viscosité superficielle dans cette surface : il a été amené à ce travail par les expériences de M. Jules Roux sur la vitesse de chute de gouttes mercurielles dans l'huile de ricin très visqueuse. Ayant établi ainsi les équations de l'équilibre *dynamique* pour une couche superficielle courbe, M. Boussinesq envisage le cas particulier d'une surface de révolution et applique le résultat

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, p. 17.

aux nappes liquides rétractiles de Savart. Il introduit la notion d'*énergie potentielle de superficie* et arrive au problème principal de ce Mémoire, touchant la chute d'une goutte fluide dans une masse fluide d'espèce différente, le calcul étant complètement effectué dans le cas où la goutte est sphérique. M. Boussinesq étudie enfin le *degré de gêne* supplémentaire apporté au mouvement de la goutte par la limitation de la masse fluide environnante.

Somigliana (*G.*). — Sur une classification des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables (87-97).

L'auteur donne une définition des *lignes de vallée* et *d'arête* (ou de faîte), notions que les manuels de topographie laissent ordinairement dans le vague; on peut adopter cette définition, bien qu'elle conduise à nommer *vallées* certaines lignes où la convexité des lignes de niveau est tournée vers le bas. M. Somigliana classe ensuite les sommets (maxima) d'après les nombres (égaux) des lignes d'arête et de vallée qui y aboutissent.

Boutroux (*P.*). — Recherches sur les transcendantes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre (*suite*) (99-159).

Le début de ce Mémoire se trouve dans le Tome XXX du même Recueil. Dans la quatrième Partie, par où débute cette suite, M. Boutroux signale d'autres fonctions du type bipériodique, définies par des équations du second et du troisième ordre. Dans la cinquième Partie sont considérées les équations

$$y'' = L(x, y)\,y'^2 + M(x, y)\,y' + N(x, y),$$

à coefficients rationnels en y. Il arrive qu'à un changement de variables près d'un type simple, ces équations définissent des fonctions asymptotes aux solutions d'équations du même type indépendantes de x. M. Boutroux étudie ces dernières et trouve toutes les équations à intégrales asymptotes aux intégrales de

$$Y'' = 6Y^2 - 6, \qquad Y'' = 2Y^3 - 2Y, \qquad \ldots.$$

Dans une sixième Partie, l'auteur indique une nouvelle méthode propre à l'étude *a priori* des fonctions méromorphes définies par les équations différentielles du second ordre, et pouvant s'étendre aux équations d'ordre supérieur. La septième et dernière Partie est consacrée au développement en série d'une intégrale première, et à l'examen de certaines particularités relatives à un problème de M. Schlesinger sur les équations du second ordre.

Nielsen (*Niels*). — Recherches sur les résidus quadratiques et sur les quotients de Fermat (161-204).

M. Nielsen démontre diverses formules concernant les *quotients de Fermat*, c'est-à dire les entiers

$$(a^{p-1} - 1) : p,$$

où p est premier, les *quotients d'Euler* ou

$$\left[a^{\frac{p-1}{2}} - \left(\frac{a}{p}\right)\right] : p,$$

où $\left(\frac{a}{p}\right)$ est le symbole de Legendre, et les *quotients de Sylvester*, c'est-à-dire les entiers

$$\frac{a^{m+1}(a^{2m}-1)B_m}{2m},$$

où B_m est le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli; c'est M. Nielsen qui a achevé de démontrer que ces dernières expressions sont entières. Ensuite, ce travail contient des résultats relatifs aux sommes des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des résidus, ou des non-résidus, quadratiques de p situés dans un intervalle donné; ou au nombre de ces résidus situés dans une progression arithmétique limitée donnée; ou à certaines analogies entre l'ensemble des entiers inférieurs à p et l'ensemble de ses résidus ou de ses non-résidus.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies (205-221).

L'auteur considère l'équation

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} P_i(x)\, u(x+i) = 0,$$

où x est une variable complexe et où les P_i sont des fonctions analytiques; d'après la nature de la question, l'auteur suppose implicitement que les P_i sont uniformes et n'ont pas d'espace lacunaire, mais il admet qu'ils peuvent avoir des points singuliers essentiels formant un ensemble énumérable. Il arrive à trouver n solutions $u_i(x)$ de cette équation, dont chacune est formée par *une seule* fonction analytique, et qui ne sont reliées par aucune relation du type

$$\sum_{i=1}^{i=n} \pi_i(x)\, u_i(x) = 0,$$

où les π_i sont des fonctions périodiques de période *un*, non toutes nulles ensemble pour toute valeur de x non congruente aux points singuliers de (1). La solution générale de (1) est alors

$$u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \pi_i(x)\, u_i(x).$$

Plancherel (*Michel*). — Les problèmes de Cantor et de du Bois-Reymond dans la théorie des séries de polynomes de Legendre (223-262).

$P_n(x)$ étant le polynome de Legendre $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, M. Plancherel recherche : 1° s'il existe une série $\Sigma a_n P_n(x)$ convergeant vers zéro en tout point de l'intervalle $(-1, +1)$ sans que tous les a_n soient nuls; 2° dans la négative, si l'on peut affirmer que la relation

$$f(x) = \Sigma a_n P_n(x)$$

entraîne

$$(1) \qquad a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

La réponse à la première question est négative, et la réponse à la seconde, affirmative. En outre, M. Plancherel montre que, pour qu'il existe une fonction $f(x)$ sommable répondant aux conditions (1), il est nécessaire et suffisant que la série

$$\Sigma a_n \int_{-1}^{x} P_n(x)\, dx$$

converge dans $(-1, +1)$; sa somme est alors $\int_{-1}^{x} f(x)\, dx$. L'auteur indique que sa méthode, plus simple que celle de M. Dini comme calculs, peut s'étendre à d'autres systèmes de fonctions orthogonales.

Cartan (*E.*). — Les groupes réels, simples, finis et continus (263-355).

Ce Mémoire est consacré à la détermination des structures des groupes *réels* simples, finis et continus. La forme quadratique ψ qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique d'un groupe réel, joue dans ce travail un rôle important. M. Cartan nomme *caractère* du groupe la différence entre le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs de ψ.

Parmi les résultats, M. Cartan, qui énumère toutes les structures possibles, indique qu'il y a toujours un type réel de caractère égal au rang, et un autre de caractère égal à l'ordre changé de signe.

Godeaux (*Lucien*). — Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1 (première Partie) (357-430).

M. Godeaux établit qu'*une involution de genres $p_a = P_4 = 1$, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, a son ordre égal à* 2, 3, 4, 6, 8 *ou* 12, *ou bien elle est composée d'involutions n'ayant aucun point de coïncidence commune.*

Il établit un tableau des singularités des surfaces représentatives de ces involutions. La méthode suivie pourrait s'appliquer à la recherche des surfaces hyperelliptiques et à celle des involutions appartenant à une surface de genres

$$p_a = p_g = 0, \qquad P_2 = P_6 = 1.$$

Jamet (*V.*). — Sur le complexe des moments vectoriels (431-440).

L'auteur établit que les droites qui portent les moments d'un système de vecteurs par rapport à des points quelconques de l'espace forment un complexe. Puis il recherche les conditions pour que les courbes tracées sur une surface et dont les tangentes appartiennent au complexe (il passe deux de ces courbes par chaque point de la surface) satisfassent à des conditions telles que d'être rectangulaires, ou de se projeter sur un plan perpendiculaire à l'axe central suivant des courbes rectangulaires, ou d'être conjuguées. Ce dernier problème doit être traité ailleurs par l'auteur au moyen d'une seconde méthode.

Pétrovitch (*Michel*). — Une transcendante entière et son rôle d'élément de comparaison (441-454).

M. Pétrovitch rappelle quelques résultats de M. Lindelöf relatifs à

$$\Delta(z, \alpha) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n^{\alpha n}},$$

où α est une constante de partie réelle positive. Puis il établit la formule

$$\Delta(z, 1) = z \int_0^1 e^{zu}\, dt + 1 \qquad (u = -t \log t),$$

dont il se sert pour approfondir l'étude de $\Delta(z, 1)$. Il montre ensuite comment $\Delta(z, \alpha)$ peut être introduite dans d'intéressantes inégalités relatives aux fonctions entières.

Villat (*Henri*). — Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides (455-493).

Plusieurs auteurs, et M. Villat lui-même, ont, à la suite de Helmholtz, étudié le mouvement permanent d'un fluide parfait en présence d'un obstacle solide dans l'hypothèse de l'existence de surfaces de glissement. M. Villat montre ici, en se servant de ses précédents travaux, que le problème ainsi posé admet au moins deux solutions également acceptables au point de vue physique. M. Villat pense que des considérations de stabilité ou de viscosité pourraient permettre de conclure, et il se propose de revenir sur ce sujet.

GEORGES GIRAUD.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome 168, 1er semestre, 1919 (1).

Guichard (*C.*). — Sur une série de surfaces à courbure totale constante telles que leurs lignes de courbure forment un réseau du type pA', $-(p+1)B'$ (36-40).

L'auteur montre comment on peut, dans l'hyperespace le plus général, déterminer des surfaces S dont les lignes de courbure soient du type indiqué : ce sont les surfaces moulures les plus générales. Il détermine ensuite des surfaces Σ applicables sur les précédentes; dès lors, si S se réduit à une sphère, ce qu'il est facile d'exprimer, Σ sera une surface à courbure totale constante.

Duport (*H.*). — Sur les équations aux dérivées partielles (45-46).

Cette Note résume sommairement le contenu d'un Mémoire présenté à l'Académie, sur les divers problèmes généraux d'intégration des systèmes différentiels, et en particulier sur l'extension de la méthode d'intégration de Laplace.

Drach (*J.*). — Détermination des cas de réduction de l'équation différentielle $y'' = [\varphi(x) + h]y$ (47-50).

Cette équation, où h est un paramètre arbitraire, joue un rôle important dans diverses questions de Géométrie et de Physique mathématique. Par la considération de son groupe de rationalité, l'auteur caractérise les divers cas de réduction qui peuvent se présenter suivant la forme de la fonction φ; il détermine en particulier cette fonction φ dans tous les cas où y peut s'obtenir par des quadratures.

Chazy (*J.*). — Remarque sur les problèmes des deux corps et des trois corps (81-83).

Après avoir fait remarquer la restriction qu'entraînent, pour les solutions des équations du problème des n corps, le fait que les masses sont des coefficients essentiellement positifs, l'auteur s'occupe du mouvement de trois corps par rapport à leur centre de gravité et énonce le théorème suivant : « Dans le problème des trois corps, tout choc de deux corps a lieu dans le plan du maximum des aires. » Il étudie ensuite les cas qui peuvent se présenter, en ce qui concerne les distances mutuelles des trois corps, après le choc de deux d'entre eux.

Bourget (*H.*). — Développement algébrique de la partie principale de la fonction perturbatrice suivant la méthode de Cauchy (83-85).

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, 2e partie, p. 5.

L'auteur a calculé la partie principale jusqu'aux termes du dixième ordre inclusivement. Ce travail, qui est considérable, sera publié sous une forme qui le rende commode à consulter.

Garnier (*R.*). — Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (142-144).

La méthode que l'auteur a imaginée pour étudier les singularités irrégulières des équations du second ordre peut s'étendre aux équations linéaires d'ordre $m > 2$ (*voir* t. 166). Elle consiste essentiellement à considérer une équation admettant un point irrégulier de rang n, comme cas limite d'une équation qui a $n+1$ singularités régulières, et à intégrer les deux équations par approximations successives. Moyennant une restriction, on peut calculer ainsi en un point isolé $m+1$ intégrales de la première équation qui sont les traces d'intégrales canoniques de la seconde.

Riquier. — Sur le prolongement analytique des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires (144-147).

Le nombre des variables indépendantes et des fonctions inconnues étant quelconque, moyennant certaines hypothèses sur la forme du système et sur les régions où l'on considère les variables, l'auteur a démontré que : si les coefficients du système sont des fonctions analytiques et régulières, ainsi que les fonctions arbitraires, dans leurs régions respectives, les intégrales correspondantes seront elles-mêmes analytiques et régulières.

Julia (*G.*). — Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fractions rationnelles (147-149).

Soit une substitution rationnelle $z_1 = R(z)$, et ζ un point invariant où l'on aurait $R'(\zeta) = e^{i\theta}$ (θ incommensurable à 2π); l'auteur démontre qu'un tel point ne peut pas être un centre, complétant ainsi sur un point important sa solution du problème de l'itération (*voir* t. 166, p. 61). Il en résulte que, en appelant E' l'ensemble dérivé des points de l'ensemble des racines des équations $z = R_n(z)$, dans toute portion du plan où ne se trouve aucun point de E', la suite des R_i ne peut avoir pour fonction limite qu'une constante; par suite, l'ensemble dérivé de l'ensemble des antécédents de tout point du plan (sauf les points exceptionnels) est identique à E'.

Lévy (*P.*). — Sur les fonctions de lignes implicites (149-152).

Étant donnée une correspondance fonctionnelle entre deux fonctions d'une variable, l'auteur énonce des conditions moyennant lesquelles l'inversion de la transformation est possible et uniforme dans tout l'espace; ces conditions sont suffisantes mais non nécessaires, et l'auteur indique diverses voies par lesquelles on pourrait les généraliser sur des exemples particuliers.

Guldberg (*A.*). — Sur les erreurs de situation d'un point (153-155).

L'auteur montre comment la loi des erreurs du plan, de Bravais, s'obtient immédiatement par la méthode des probabilités continues de M. Bachelier.

Mesnager. — Sur un cas de simplification des formules de M. Boussinesq (156-158).

Le problème de M. Boussinesq comporte de remarquables simplifications lorsque le coefficient de Poisson est égal à 0,5 (matières à volume invariable); l'auteur l'étudie pour les corps à deux et trois dimensions et aboutit en particulier, dans le cas d'un solide limité par une paroi plane et illimité partout ailleurs, à un théorème donnant très simplement la pression produite en un point intérieur par une force appliquée en un point de la surface plane.

Guichard (*C.*). — Sur la déformation des quadriques (200-204).

Une quadrique Q se transforme par homographie en une sphère S; si Σ est une déformée de Q, les formules montrent aisément que S est applicable sur une certaine variété à cinq dimensions, dont trois des coordonnées sont celles de Σ, et le problème se ramène ainsi à la recherche de certains réseaux applicables sur Σ et sur la variété. L'auteur cherche ceux de ces réseaux qui se déterminent par des équations intégrables suivant la méthode de Laplace et trouve ainsi diverses séries de déformées de la quadrique.

Drach (*J.*). — Sur les solutions algébriques des équations différentielles du premier ordre (212-215).

Soit l'équation

$$X\,dy - Y\,dx = 0,$$

où X et Y sont des polynomes de degré m en x et y; la détermination effective du groupe de rationalité de l'équation exige la recherche de tous les polynomes irréductibles f qui satisfont à l'identité

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} = Mf,$$

M étant un polynome de degré $m-1$. L'auteur développe une méthode basée sur la considération simultanée de tous les points communs aux courbes $X = 0$, $Y = 0$, et qui permet de trouver des conditions nécessaires à l'existence de ces polynomes, c'est-à-dire à l'existence de solutions algébriques particulières. La méthode s'étend au cas de n variables.

Montel (*P.*). — Sur les polynomes d'approximation et l'existence des dérivées (215-217).

Soit $P(x, y)$ un polynome de degré m en x, n en y, dont le module est

inférieur à M dans un domaine (Γ). L'auteur a démontré que, en tout point d'un domaine quelconque (Γ′) intérieur à (Γ), on a

$$\left| D^{\alpha+\beta}_{x^\alpha y^\beta} \right| < k\, m^\alpha n^\beta M,$$

D représentant la dérivée généralisée de Riemann-Liouville et k une constante indépendante du polynome.

On en déduit que si $\Delta_b^{(r)}$ est la différence d'ordre r d'une fonction $f(x)$, et si le module de $(\Delta_b^{(r)} : h^\alpha)$ $(\alpha \leqq r)$ est borné dans l'intervalle $(-1, +1)$, la fonction a une dérivée d'ordre quelconque inférieure à α, dans cet intervalle. Ce dernier théorème se généralise aux fonctions de deux variables.

Maillet (*E.*). — Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers (217-220).

Après avoir rappelé une condition, obtenue antérieurement, qui est nécessaire pour qu'une courbe algébrique à coefficients entiers puisse passer par une infinité de points à coordonnées entières, l'auteur donne une méthode qui permet d'obtenir ces points, pour les courbes unicursales, par un nombre fini d'opérations.

Angelesco (*A.*). — Sur deux extensions des fractions continues algébriques (262-265).

Les quantités S représentant des développements de la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \ldots,$$

on peut se proposer avec Hermite de déterminer p polynomes N, tels que la fonction $N_1 S_1 + N_2 S_2 + \ldots + N_p S_p$ soit la somme d'une partie entière et d'une série en $\frac{1}{x}$ dont le premier terme soit au moins d'ordre $n_1 + n_2 + \ldots + n_p + p$ (n_k degré de N_k). De même on peut déterminer un polynome P, de degré $n_1 + \ldots + n_p$, tel que PS_i soit la somme d'une partie entière et d'une série dont le premier terme est d'ordre $(n_i + 1)$. L'auteur indique une méthode pour obtenir ces divers polynomes et en déduit quelques-unes de leurs propriétés.

Maillet (*E.*). — Sur le mouvement graduellement varié et la propagation des crues (266-268).

En négligeant, comme les résultats d'observations le permettent, certains termes des équations de M. Boussinesq pour le mouvement varié non permanent d'un cours d'eau dans un lit cylindrique, l'auteur obtient deux équations aux dérivées partielles donnant l'une la hauteur, l'autre le débit; la discussion de ces équations conduit à divers résultats relatifs aux maxima et minima de l'onde niveau et de l'onde débit.

Rateau (*A.*). — Sur l'écoulement des gaz à très fortes pressions (330-335).

Les formules classiques, supposant les gaz parfaits, sont insuffisantes dès que la pression initiale est de l'ordre de 300^{atm}, comme par exemple dans les pièces d'artillerie; il faut alors tenir compte du covolume et cette Note indique les modifications à faire subir aux formules, en particulier pour le débit et la vitesse au col de la tuyère; on retrouve le théorème d'Hugoniot.

Drach (*J.*). — Sur l'intégration par quadratures de l'équation $y'' = [\varphi(x) + h]y$ (337-340).

Dans une Note précédente (*voir* ci-dessus) l'auteur a montré que les fonctions φ, pour lesquelles l'équation donnée s'intègre par quadratures, s'obtiennent par l'intégration d'une certaine équation différentielle; il intègre ici cette équation et aboutit par conséquent à la détermination effective de φ : il obtient ainsi des fonctions hyperelliptiques particulières; il se trouve alors que y est une somme d'intégrales de troisième espèce, ce qui généralise les résultats d'Hermite et de M. Picard sur l'équation de Lamé.

Denjoy (*A.*). — Sur une propriété des fonctions de variable complexe (387-389).

L'auteur démontre le théorème suivant : « Une fonction analytique, holomorphe et bornée, au voisinage et d'un côté d'une ligne rectifiable L, possède une valeur limite unique sur tout chemin aboutissant à L (du côté considéré) sous une incidence nulle ou aiguë, sauf exception éventuelle pour des chemins aboutissant à un ensemble de longueur nulle situé sur L. » On en déduit la même proposition pour les fonctions harmoniques.

Risser. — Sur les formules représentatives des trajectoires (390-392).

Après discussion de diverses formules, l'auteur propose d'en adopter deux différentes pour la même trajectoire : une parabolique pour la branche montante et une hyperbolique pour la branche descendante.

Mesnager. — Valeurs maxima de la tension près de la face inférieure d'une plaque carrée supportant une charge unique concentrée en son centre (392-395).

Discussion des résultats numériques fournis par les formules données par l'auteur (t. 164, 1917, p. 721) et comparaison avec les résultats admis jusqu'à ce jour.

Faure (*E.*). — Sur la force gyroscopique des fluides (395-398).

Étude de diverses analogies très remarquables, qui s'expriment par des for-

mules identiques, entre les phénomènes gyroscopiques et les phénomènes électromagnétiques.

Rateau (*A.*). — États successifs d'un gaz à haute pression dans un récipient qui se vide par une tuyère (435-439).

En supposant la détente adiabatique, l'auteur calcule le poids du gaz restant en fonction du temps, ainsi que sa pression et sa température; l'influence du covolume n'est pas négligeable, comme on le voit sur l'exemple du calcul de la décharge d'un canon.

Garnier (*R.*). — Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (452-455).

Cette Note complète la précédente du même auteur (*voir* plus haut) en mettant en évidence des *paramètres*, lesquels constituent la *trace* des invariants du groupe de monodromie de l'équation régulière qui a pour limite l'équation irrégulière considérée.

Lecornu (*L.*). — Sur l'écoulement des fluides (481-484).

L'auteur étudie particulièrement l'état du fluide dans les étranglements ou les renflements d'un filet; il rectifie le théorème d'Hugoniot au sujet de la vitesse au point du filet où se produit le maximum de contraction (vitesse du son) et en indique quelques conséquences.

Drach (*J.*). — Sur l'intégration par quadratures de l'équation $y'' = F(x, y)$ (497-501).

Les cas les plus simples de réduction de l'équation donnée correspondent à l'existence d'une intégrale rationnelle en y' pour l'équation qui détermine le groupe de rationalité

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} F(x, y) = 0.$$

L'auteur donne une méthode pour former tous les cas et pour définir la fonction F correspondante à l'aide d'intégrales définies prises dans le champ complexe; on peut étendre la méthode à des équations d'ordre quelconque.

Fatou (*P.*). — Sur les lignes singulières des fonctions analytiques (501-502).

Rectification de priorité au sujet de la Note ci-dessus de M. Denjoy.

Julia (*G.*). — Une propriété générale des fonctions entières liée au théorème de M. Picard (502-504).

Par l'introduction d'une variable continue auxiliaire, l'auteur obtient une

démonstration nouvelle et plus précise du théorème de M. Picard : « Une fonction entière prend toutes les valeurs finies, sauf peut-être une exceptionnelle, dans une certaine bande du plan aboutissant à l'infini et d'épaisseur relative arbitrairement petite. »

Buhl (*A.*). — Sur l'échange du paramètre et de l'argument. Analogies avec la réduction des intégrales doubles de seconde espèce (504-506).

La transformation

$$X = \frac{\varphi(x, y)}{x - y}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\varphi(y, y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x, x)},$$

appliquée à l'identité

$$\int X\, dY = \iint dX\, dY,$$

conduit à des formules d'échange très générales. Par un choix convenable de φ, on transforme ainsi une intégrale de ligne admettant une ligne d'infini en une intégrale double ne l'admettant pas, mais ce choix exige la solution d'une équation fonctionnelle difficile; cela éclaire la difficulté que l'on rencontre dans le problème de la réduction au nombre minimum des intégrales doubles de seconde espèce.

Hadamard (*J.*). — Remarque sur l'intégrale résiduelle (533-534).

Dans un milieu dont le mouvement obéit à une équation du type hyperbolique, l'onde laisse derrière elle un mouvement résiduel; l'auteur annonce que, si l'équation est à coefficients analytiques, l'intégrale qui représente ce mouvement résiduel est analytique.

Gambier (*B.*). — Surfaces applicables l'une sur l'autre (537-539).

Lorsque deux surfaces analytiques sont applicables l'une sur l'autre, il arrive souvent qu'un point réel de l'une correspond dans l'application à un point imaginaire de l'autre, de sorte que l'application ne peut être réalisée physiquement; l'auteur en donne des exemples pour des cas connus; il indique des surfaces applicables sur elles-mêmes de la manière ci-dessus.

Harald Cramér. — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ (539-541).

L'auteur étudie la fonction $V(z) = \Sigma e^{\rho z}$, où la somme s'étend à tous les zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de $\zeta(s)$ dont la partie γ est positive; cette fonction peut être facilement rendue uniforme dans le plan et holomorphe à l'origine par l'addition d'une fonction connue. L'auteur en déduit une égalité limite relative au nombre de zéros tels que l'on ait $0 \leqq \gamma \leqq T$, lorsque T croît indéfiniment. La méthode s'étend à l'étude des zéros de la fonction $\zeta_k(s)$ correspondant à un corps algébrique k quelconque.

Pétrovitch (*M.*). — Fonctions entières se rattachant aux nombres premiers (542-544).

Considérons la série

$$F(x) = \Sigma(-1)^n \frac{\alpha_{2n} x^{2n}}{1.2\ldots 2n},$$

où l'on a

$$\alpha_n = \int_a^b f(t)\,\theta(t)\,t^n\,dt,$$

$f(t)$ étant holomorphe entre a et b, et θ la fonction de Laurent définie par

$$\theta(t)\left(\sin\frac{\pi}{t}\right)^2 = \left[\sin\frac{\pi\Gamma(t)}{t}\right]^2.$$

L'auteur démontre que la série $\Sigma F[(2n-1)\pi]$ converge et a pour somme

$$-\frac{1}{2}\Sigma f(p_i),$$

en appelant $p_1, p_2, \ldots$ les nombres premiers compris entre a et b. Si l'on choisit $f(t) \equiv t$, on obtient ainsi la somme de ces nombres premiers.

Viggo Brun. — Le crible d'Ératosthène et le théorème de Goldbach (544-546).

En donnant au crible d'Eratosthène une forme spéciale, indiquée par Merlin, l'auteur démontre plusieurs propositions; en particulier : tout nombre pair (assez grand) est la somme de deux nombres dont le nombre de facteurs premiers ne surpasse pas 9.

Cotton (*E.*). — Sur la formule de Bernoulli (547-549).

On fait en hydraulique un large emploi de cette formule, bien qu'aucune des conditions suivant lesquelles elle est établie ne soit remplie. L'auteur démontre une formule qui peut lui être substituée, dans un tuyau de section finie, quand le liquide est parfait et que la pression et la vitesse varient peu; il suffit de remplacer dans celle de Bernoulli les divers termes par leur *moyenne par rapport au débit*.

Rateau (*A.*). — Quantité de mouvement totale et vitesse moyenne du jet de gaz sortant d'un réservoir qui se vide par une tuyère (581-587).

Cette Note fait suite à la précédente du même auteur (*voir* plus haut); après avoir indiqué les raisons pour lesquelles il va négliger ici le covolume, l'auteur calcule la quantité de mouvement totale par le moyen d'une intégrale qui peut justement s'exprimer en termes finis dans les cas intéressants de la pratique (gaz très chauds, gaz parfaits); il en déduit la vitesse moyenne dont il étudie la variation en fonction des données initiales.

Julia (*G.*). — Quelques propriétés générales des fonctions entières liées au théorème de M. Picard (598-600).

Étant donnée une fonction entière $f(z)$, l'étude de la famille de fonctions

$$f_n(z) = f(zz^n)$$

conduit l'auteur à des résultats qui précisent la répartition des racines de l'équation $f(z) = a$; on peut les généraliser à toute fonction uniforme ayant un point singulier essentiel isolé. L'auteur étudie en outre la nature de l'ensemble des points autour desquels la suite des $f_n(z)$ n'est pas normale (ensemble parfait), et cette étude le conduit à former des fonctions entières d'*ordre quelconque* qui tendent uniformément vers l'infini dans une suite de couronnes entourant l'origine et de même épaisseur relative.

Petot (*A.*). — Sur la théorie analytique des turbines hydrauliques (600-603).

L'auteur développe une théorie qui tient compte jusqu'à un certain point des pertes de charge dues aux frottements et aux chocs, lesquelles sont d'habitude négligées, et sans introduire néanmoins de complication excessive. La détermination de certains coefficients nécessiterait des expériences faites sur des turbines établies d'après la théorie en question.

Guillaumin (*G.*). — Sur les coups de bélier dans les conduites de diamètre variable (605-608).

L'auteur étudie le cas d'une conduite tronconique et d'égale résistance; les équations qui donnent le coup de bélier et le débit s'intègrent et donnent des résultats concordants avec ceux de M. Eydoux pour les conduites formées de plusieurs parties de diamètres différents. Le coup de bélier en fin de fermeture brusque dépend de la loi de fermeture du distributeur, contrairement à ce qui a lieu pour les conduites cylindriques; mais si la fermeture se fait dans un temps très court, on trouve la même valeur dans les deux cas.

Sparre (*M. de*). — Conditions à remplir lorsqu'on veut dans une installation hydraulique augmenter le débit, et par suite le travail, sans modifier la conduite (663-666).

Soit une conduite desservant une roue Pelton, et supposons qu'on veuille lui en faire desservir simultanément une deuxième; l'auteur établit la formule donnant le travail total dont il cherche le maximum. La discussion montre que l'on peut augmenter la vitesse dans la conduite jusqu'à ce que la perte de charge atteigne 0,2 de la charge; mais il est désavantageux d'aller au delà, pour le rendement de la conduite.

Lefschetz (*S.*). — Sur l'analyse *situs* des variétés algébriques (672-674).

L'auteur étudie les cycles à i dimensions d'une variété à d dimensions et obtient des formules reliant le maximum du nombre de cycles *effectifs* par rapport à une hypersurface de la variété, à des invariants intéressants (nombres de Picard et de Séveri). Il annonce comme conséquence que le nombre de Picard d'une surface algébrique est égal au nombre des cycles superficiels par rapport auxquels les intégrales doubles de première espèce n'ont pas de période.

Gambier (*B.*). — Surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution (674-677).

Parmi ces surfaces, les unes sont *physiquement* applicables, les autres ne le sont qu'à condition de faire correspondre un point réel de l'une à un point imaginaire de l'autre; dans tous les cas, la recherche de ces surfaces est équivalente à celle des courbes à torsion constante, et l'auteur en déduit quelques conséquences relatives à celles de ces surfaces qui sont algébriques.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Énumération des surfaces de Riemann régulières de genre un (677-678).

Soient S une telle surface, R la surface à connexion simple superposée à S; représentons R sur le plan euclidien P, et la division de R en feuillets au moyen des lignes de passage par une division de P en polygones fondamentaux; l'auteur montre que le groupe des transformations de P laissant invariants tous les points de S et déterminant complètement la surface S est un groupe de translation dont les coefficients peuvent être caractérisés, dans chacun des quatre cas qui se présentent suivant le nombre de cycles de S.

Julia (*G.*). — Quelques propriétés des fonctions méromorphes générales (718-720).

L'auteur applique ici aux fonctions méromorphes générales la méthode qui lui a servi dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut) à étudier la répartition des racines de l'équation $f(z) = a$, lorsque $f(z)$ est entière ou méromorphe avec une valeur exceptionnelle. La question d'ailleurs ne se pose guère que dans le cas où $f(z)$ admet au moins une valeur asymptotique, finie ou infinie.

Kryloff (*N.*). — Sur quelques formules d'approximation, fondées sur la généralisation des quadratures, dites *mécaniques* (721-723).

La fonction

$$F(y) = \int_a^b f(x)\, K(x, y)\, dx,$$

où $f(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz et $K(x, y)$ à certaines inégalités restrictives, peut se calculer au moyen d'une série d'intégrales analogues, mais

où $f(x)$ est remplacée par $\frac{P_n(x)}{x-x_i}$, P_n désignant un polynome; on peut n'en conserver que les premiers termes et l'auteur donne une limite supérieure du reste, qui est de l'ordre de $n^{-\frac{1}{2}}$.

Guillaumin (*G.*). — Sur les coups de bélier dans les conduites de diamètre variable et formées de parties tronconiques (723-726).

L'intégration des équations du coup de bélier dans le cas d'une conduite tronconique, effectuée par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* plus haut), permet d'étudier les conduites formées de portions de conicité différente (ajutages). L'auteur étudie spécialement les oscillations de pression en une section de jonction, au passage d'une onde simple, et le coup de bélier de fermeture.

Lévy (*P.*). — Sur la généralisation de l'équation de Laplace dans le domaine fonctionnel (752-755).

Après avoir écrit l'équation qui généralise celle de Laplace et fait une remarque au sujet des fonctions composées de plusieurs fonctionnelles harmoniques, l'auteur s'occupe des problèmes de Cauchy et de Dirichlet; cela le conduit à généraliser la théorie du potentiel dans le domaine fonctionnel.

Bompiani (*E.*). — Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque (755-757).

L'auteur démontre que : si la projection d'un double système de quasi-asymptotiques d'une surface à k dimensions, sur un espace à $h < k$ dimensions, forme un réseau conjugué, celui-ci aura ses invariants égaux. Ce théorème, qui généralise celui de M. Kœnigs sur les projections planes des lignes asymptotiques d'une surface, résulte de ce que certains systèmes d'équations aux dérivées partielles ne peuvent avoir de solution commune avec une équation de Laplace que si celle-ci a ses invariants égaux.

Lefschetz (*S.*). — Sur les variétés abéliennes (758-761).

L'auteur établit les relations existant entre le genre de la variété, son nombre de Picard et l'ordre de singularité de la matrice de Riemann formée par le tableau des périodes; il en déduit comme application la détermination des invariants de certaines variétés de Jacobi.

Julia (*G.*). — Quelques propriétés des fonctions entières ou méromorphes (812-815).

L'auteur revient sur les propriétés de ces fonctions qu'il a démontrées dans les trois Notes précédentes, afin de les préciser, et pour étendre le théorème de M. Picard au cas des valeurs asymptotiques finies ou infinies de la fonction.

Guldberg (*A.*). — Sur la loi des erreurs de Bravais (815-817).

L'auteur généralise cette loi, pour l'espace à un nombre quelconque de dimensions, par la méthode des probabilités continues.

Guillaumin (*G.*). — Sur certaines solutions particulières du problème de l'état ébouleux (818-820).

L'auteur étudie, au moyen des équations de M. Boussinesq, le cas où une droite donnée qu'on prend pour axe OX est une ligne de rupture pour le massif en état ébouleux; soient p la pression moyenne, χ l'azimut de la plus grande des pressions principales; si l'on suppose $\frac{dp}{dy}$ et $\frac{d\chi}{dy}$ finies pour $y = 0$, on obtient la solution de Rankine-Lévy; sinon il faut étudier la nature analytique de p et χ dans le voisinage de OX. L'auteur fait cette étude dans un cas particulier et en donne une application à un exemple concret.

Carleman. — Sur la représentation conforme des domaines multiplement connexes (843-845).

Démonstration simple, par voie indirecte, du théorème de M. Koëlbe : « Toute fonction qui établit une correspondance conforme entre deux domaines, dont les contours complets se composent de circonférences entières en nombre limité, est une fonction linéaire. »

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Énumération des groupes finis de transformations topologiques du tore (845-848).

L'auteur établit cette énumération de groupes finis de transformations biunivoques et continues, en utilisant les résultats de sa dernière Note (*voir* plus haut).

Denjoy (*A.*). — Sur la vraie valeur des intégrales définies (848-851).

L'auteur établit le théorème suivant : « Si $\varphi(x)$ est mesurable et bornée sur le chemin (a, b) où elle est définie, l'intégrale (de Lebesgue) $\int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x - x_0}$ possède une vraie valeur au sens de Cauchy, quel que soit x_0 entre a et b, sauf éventuellement en un ensemble de mesure nulle. » La démonstration résulte de l'application du théorème énoncé dans la dernière Note de l'auteur (*voir* plus haut) à la fonction de variable complexe $e^{i\Pi(z)}$, où

$$\Pi(z) = \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x - z},$$

z décrivant un chemin qui aboutit en un point de (a, b).

Defourneaux. — Sur quelques propriétés des polynomes électrosphériques (880-882).

Étude des propriétés et des relations de récurrence entre les quatre poly-

nomes

$$U_n(v) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}, \qquad H_n(v) = 2\cos n\varphi,$$

$$F_n(v) = \frac{\sin(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}, \qquad G_n(v) = \frac{\cos(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}},$$

où l'on a posé $v = 2\cos\varphi$.

Julia (*G.*). — Sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (882-884).

Dans ses Notes précédentes (*voir* plus haut), l'auteur a énoncé quelques propriétés des fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé, dans l'hypothèse que, sur un certain chemin allant à l'infini, la fonction tende vers une limite déterminée; il montre ici, par l'exemple des fonctions elliptiques, que cette hypothèse est indispensable. Il précise ensuite l'une de ces propriétés d'où il résulte que la fonction ne peut avoir aucune valeur exceptionnelle lorsqu'un certain ensemble de points n'est pas parfait.

Guillaumin (*G.*). — Sur certaines solutions particulières du problème de l'état ébouleux, où le massif considéré comprend deux régions régies par des lois différentes (885-887).

L'auteur montre que l'on peut former la solution du problème au moyen de la solution de M. Boussinesq pour chacune des deux régions, à condition que la courbe de jonction soit une ligne de glissement (le long de laquelle est réalisé l'équilibre limite) commune aux deux solutions.

Humbert (*G.*). — Sur la mesure des classes de formes quadratiques, ternaires et positives, de déterminant donné (917-923).

Il existe des formules simples (Eisenstein, Stephen Smith) pour exprimer la mesure de l'ensemble de telles classes ayant des invariants Ω et Δ donnés; l'auteur se pose ici la même question pour les classes dont on donne le déterminant $D = \Omega^2\Delta$ et obtient une formule assez compliquée dans le cas général, mais qui se simplifie beaucoup dans certains cas; par exemple, la mesure des classes ternaires positives, primitives ou non, mais propres, de déterminant *impair* D, est égale à

$$\frac{1}{24}\Sigma(2nn' - n'^2)$$

(Σ étendue aux décompositions en facteurs $D = nn'^2$, où n et n' sont entiers et positifs).

Lecornu (*L.*). — Sur les tourbillons d'une veine fluide (923-926).

Considérons une veine sortant, à l'état permanent, d'un réservoir où le fluide reste sensiblement en équilibre, et supposons les pertes de charge négligeables; l'auteur montre qu'il existe certainement des tourbillons; par suite, d'après un théorème de Beltrami, les lignes de flux, qui sont ici les trajectoires, coïncident avec les lignes de tourbillons. Le rapport λ du tourbillon à la vitesse ne dépend que de la forme des trajectoires; son étude renseigne donc sur la forme de

celles-ci. L'auteur termine par la discussion de la valeur de λ en un étranglement de la veine.

Belot (*E.*). — Sur les orbites spirales à gravitation équilibrée (935-937).

L'auteur expose comment on peut, dans son système cosmogonique tourbillonnaire, démontrer la loi des distances des planètes et satellites.

Humbert (*G.*). — Sur la mesure des classes de formes quadratiques, ternaires et positives, de déterminant donné (969-975).

L'auteur applique les résultats de sa dernière Note (*voir* plus haut) au cas d'un déterminant impairement pair $D = 2D'$; la mesure de l'ensemble est alors $\frac{1}{8}\Sigma nn'$ (Σ étendu aux décompositions en facteurs $D = nn'^2$). Dans le cas général, la formule peut se mettre sous une forme simplifiée dont l'auteur indique diverses applications.

Guichard (*C.*). — Sur un mode de génération des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système (982-984).

Soient S un cône du second ordre et (C) une courbe quelconque de ce cône; sur la développable circonscrite à (C), considérons le réseau formé par les génératrices et par les sections (Γ) des plans tangents à S : ce réseau est conjugué et son équation de Laplace est à invariants égaux.

Dans ces conditions, si (C) est une courbe isotrope, en faisant rouler le cône S sur un cône quelconque T, chaque ligne (Γ) décrit une surface Σ dont elle reste constamment ligne de courbure; en outre, Σ est isothermique comme conséquence de la propriété énoncée au début.

Julia (*G.*). — Sur les fonctions entières ou méromorphes (990-992).

Dans des Notes précédentes (t. 168, p. 502 et 718, *voir* plus haut), l'auteur a obtenu des propriétés des fonctions $f(z)$ en étudiant l'ensemble ε_σ des points où la suite des fonctions $f_n(z) = f(z\sigma^n)$, avec $|\sigma| < 1$, n'est pas normale. Il revient ici sur l'étude de ε_σ pour en préciser et compléter des détails; en particulier, ε_σ est fermé mais pas toujours parfait; il contient un continu si $f(z)$ admet une valeur asymptotique finie, lorsque $f(z)$ est entière, et deux valeurs asymptotiques si $f(z)$ est méromorphe.

Erwand Kogbetliantz. — Sur les développements de Jacobi (992-994).

Soit $f(x)$ une fonction sommable dans $(-1, +1)$; son développement en série au moyen de polynomes hypergéométriques de Jacobi a été étudié par Darboux; en spécialisant ces polynomes, l'auteur démontre que la série est sommable (C, δ) et que la sommabilité est uniforme dans tout intervalle de continuité de $f(x)$ intérieur à un intervalle où $f(x)$ est à variation bornée.

Brouwer (*L.-E.-J.*). — Sur les points invariants des transformations topologiques des surfaces (1042-1044).

L'auteur a déjà démontré que toute transformation biunivoque et continue d'une surface bilatérale fermée, de genre $p = 0$, à indicatrice invariante, laisse au moins *un* point invariant; mais ce théorème n'est vrai que pour $p = 0$, et l'auteur montre par des exemples que si $p > 0$ on peut construire de telles transformations ne laissant aucun point invariant.

Julia (*G.*). — Les fonctions entières et la croissance (1087-1089).

Au lieu de considérer la suite régulière $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots$ comme dans ses Notes précédentes, l'auteur prend une suite croissante quelconque $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ pour former la famille des fonctions $\varphi_n(z) = \varphi(z\sigma_n)$ issues de $\varphi(z)$; cette famille jouit alors de propriétés différentes; par exemple, en appelant $z_p(a)$ les racines de $\varphi(z) = a$, il existe des fonctions entières φ et des suites σ_n pour lesquelles les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ n'ont d'autre point limite que 0 et ∞, tandis que si la suite est régulière il existe au moins un point limite dans toute couronne circulaire d'épaisseur σ.

Erwand Kogbetliantz. — Sur la sommation des séries divergentes (1090-1092).

L'auteur démontre que : une série divergente, sommable $(R, \lambda, \delta + \gamma)$, où $\delta > 0$ et $\gamma > 0$, est aussi sommable avec la même somme par l'application du procédé (R, λ, δ) aux moyennes typiques de Riesz d'ordre γ, ou aussi du procédé (R, λ, γ) aux moyennes d'ordre δ, et *vice versa*. Plusieurs méthodes de sommation connues s'étudient comme cas particuliers de cette proposition.

Rateau (*A.*). — Théorie du vol des aéroplanes aux diverses altitudes. Prédétermination de la hauteur du plafond (1142-1147).

L'auteur expose une théorie analytique qui permet de déterminer toutes les circonstances du vol *horizontal* d'un aéroplane, connaissant les caractéristiques de l'avion, de l'hélice et du moteur; il y a quatre inconnues déterminées par quatre équations; la résolution se fait par approximations successives et la discussion donne les valeurs remarquables, en particulier la hauteur du plafond.

Borel (*E.*). — La théorie des ensembles et les nombres décimaux (1148-1150).

L'auteur annonce qu'on peut fonder une véritable méthode pour l'étude de la théorie des ensembles, en particulier des relations entre le continu et les ensembles denses, sur l'emploi des nombres et des intervalles décimaux, qui ont parfois été utilisés à titre d'exemple. De même que les nombres décimaux suffisent pour mesurer les grandeurs, les *ensembles décimaux* (définis au moyen d'intervalles décimaux) suffisent pour étudier les ensembles.

Boutroux (*P.*). — Sur un mode de définition d'une classe de fonctions multiformes dans tout le domaine d'existence de ces fonctions (1150-1152).

La représentation d'une fonction multiforme par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire masque les propriétés spéciales de la fonction étudiée; l'auteur a obtenu le principe d'une représentation nouvelle en étudiant l'intégrale générale de l'équation

$$zz' = 3mz + 2x^3 + bx + c,$$

qui est multiforme dans le voisinage de $x = \infty$, les branches se groupant en deux familles et chaque branche étant définie par la valeur d'un paramètre C. On passe d'une branche à une autre par une substitution sur C; l'auteur ramène ainsi le problème à l'étude d'un groupe de substitutions dont il indique quelques propriétés fondamentales.

Harald Cramér. — Sur la distribution des nombres premiers (1153-1154).

Appelons P tout point d'un plan dont les coordonnées sont des nombres premiers $\neq 0$; disons que D est une droite limite pour l'ensemble des P s'il y a une infinité de ces points arbitrairement voisins de D. L'auteur démontre que sur tout arc de cercle ayant pour centre un point A donné, il y a un ensemble non dénombrable de points B tels que AB est une droite limite.

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces isothermiques (1185-1188).

Parmi les surfaces isothermiques, on peut se proposer de trouver celles dont l'équation du réseau des lignes de courbure est intégrable par la méthode de Laplace; l'auteur en donne la solution complète, qui se divise en deux séries : l'une ne comportant que des constantes arbitraires, l'autre renfermant une fonction arbitraire.

Erwand Kogbetliantz. — Sur les séries trigonométriques (1193-1194).

L'auteur étudie l'influence de l'ordre d'infinitude α de $f(\theta)$, en un point $\theta = \xi$ de l'intervalle $(0, 2\pi)$, sur la sommabilité de son développement trigonométrique en un autre point. Par exemple, si $\alpha > 1$ et si au voisinage de ξ on a

$$f(\theta) = A(\theta - \xi)^{-\alpha} + \varphi(\theta),$$

φ étant à variation bornée dans $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, on voit que, sauf au point ξ, la série trigonométrique de $f(\theta)$ n'est nulle part sommable $(C, \delta \leqq \alpha - 1)$, tandis qu'elle l'est $(C, \delta > \alpha - 1)$ et a pour somme

$$\frac{1}{2}[f(\theta - 0) + f(\theta + 0)].$$

Humbert (*G.*). — Sur les formes quadratiques positives d'Hermite (1240-1246).

L'auteur continue ici l'étude des applications de la formule générale qu'il a donnée dans une Note précédente (t. 168, p. 917, *voir* plus haut); il envisage les formes d'Hermite du corps $\sqrt{-P}$; l'expression de la mesure est particulièrement simple dans le cas des classes propres, de déterminant donné, pour $P = 1$ ou $P = 2$. L'auteur étudie dans ces deux cas le nombre des classes de discriminant donné et en montre quelques applications aux formes binaires et positives ordinaires.

Rateau (*A.*). — Suite de la théorie des aéroplanes. Conséquences principales des formules (1246-1251).

L'auteur continue la discussion des équations fondamentales données dans sa Note précédente (*voir* plus haut); on voit par exemple que, pour une hélice et un moteur donnés, un avion a toujours la même vitesse au plafond, quel que soit son poids. Il étudie principalement l'angle d'incidence optimum au plafond et les variations de la hauteur Z du plafond suivant les modifications de l'appareil; l'introduction d'un turbo-compresseur alimentant en air le moteur permet d'élever ce plafond à 3Z théoriquement.

Axel Egnell. — Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées (1263-1265).

En un point M d'un champ une direction Δ est dite *asymptotique* si la dérivée du vecteur prise en M suivant Δ est perpendiculaire à Δ. Dans le plan perpendiculaire au vecteur, il existe en général deux directions asymptotiques; l'auteur montre que le seul cas d'indétermination est celui où le vecteur est perpendiculaire en chaque point au plan polaire de ce point par rapport à un complexe linéaire.

Remoundos (*G.*). — Les singularités des équations différentielles et les séries sommables (1265-1268).

L'auteur étudie la solution de l'équation différentielle

$$x^2 y' = by + f(x, y),$$

ou f est un polynome nul pour $x = y = 0$, qui répond aux conditions initiales singulières $x_0 = y_0 = 0$. La série de Mac-Laurin déduite de l'équation est divergente, mais quand elle est absolument sommable une méthode de M. Borel permet d'en tirer tout de même l'intégrale cherchée. L'étude de la sommabilité absolue se ramène à celle du prolongement analytique, le long de Ox, d'une certaine fonction algébrique, et cette proposition peut recevoir diverses extensions.

Bloch (*L.*). — La formule de Ritz et la théorie des quanta (1271-1273).

L'auteur montre que la théorie des quanta permet de rendre compte de la formule spectrale de Ritz, pour les atomes à structure compliquée, en suivant la voie par laquelle Bohr a établi la formule de Balmer relative aux raies de l'hydrogène. La formule de Ritz, contenant des termes expérimentaux, permet

inversement d'obtenir par l'expérience quelques indications sur la structure de l'atome.

Rateau (*A.*). — Théorie de la montée rectiligne des aéroplanes. Vitesse ascensionnelle maximum (1295-1301).

Les équations fondamentales sont ici plus compliquées que celles du vol rectiligne, étudié dans les Notes précédentes de l'auteur; on ne peut les résoudre rigoureusement, mais l'auteur indique des méthodes d'approximation qui suffisent dans la pratique et qui permettent même de discuter les conditions du vol en montée : vitesse, pente maximum de la trajectoire, inclinaison, etc.; on voit ainsi, par exemple, que le pilote peut incliner l'avion dans des limites très larges sans faire varier sensiblement la vitesse ascensionnelle.

Boutroux (*P.*). — Sur une famille de fonctions multiformes, intégrales d'une équation différentielle du premier ordre (1307-1310).

Suite de la Note précédente du même auteur (*voir* plus haut); en étudiant les valeurs de C de grand module, on voit que l'ensemble des valeurs de C appartenant à une même intégrale, pour des valeurs de $|x|$ suffisamment grandes, est engendré par la multiplication de trois substitutions fondamentales et de leurs inverses; ces substitutions sont définies par le moyen de lacets décrits autour des quatre points critiques de l'intégrale considérée.

Guillaumin (*G.*). — Sur les conduites forcées à caractéristique variable (1310-1313).

L'auteur remarque que, par une transformation d'abscisse, les équations générales des conduites forcées ramènent toujours l'étude au cas d'une conduite fictive où la vitesse de propagation serait constante; si la caractéristique de la conduite est constante, on est ramené au cas d'une conduite cylindrique.

Cela permet de traiter plus simplement des problèmes déjà étudiés, en particulier celui des conduites formées de plusieurs tronçons cylindriques.

Brillouin (*M.*). — Actions mécaniques à hérédité discontinue par propagation; essai de théorie dynamique de l'atome à quanta (1318-1320).

Soit une particule qui se meut dans un milieu élastique avec une vitesse beaucoup plus grande que la célérité des ondes dans le milieu, et supposons que, pour une raison quelconque, la particule émette à chaque instant des ondes; suivant la forme de sa trajectoire (périodique, par exemple), la particule sera rejointe à chaque instant par un nombre fini d'ondes émises par elle-même antérieurement; ce nombre est un entier variable et l'on obtient ainsi un champ à *hérédité* discontinue. On peut ainsi fonder la théorie des quanta sur une hypothèse *dynamique* que l'auteur expose sommairement, et qui soulève d'importants problèmes.

E. Gau.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. 3e série. Tome XXXII, 1915 (1).

Boussinesq (*J.*). — Calcul des vitesses bien continues de régime uniforme, par des polynomes, dans les tubes cylindriques de formes diverses, avec application à une évaluation approximative du coefficient du débit, dans la filtration de l'eau à travers des sables à grains plus ou moins fins (1-48).

M. Boussinesq emploie la méthode de Barré de Saint-Venant, qui consiste à remplacer la solution nulle au contour de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -K,$$

dont dépend le problème (K étant constant), par un polynome d'ordre de plus en plus élevé, assujetti à s'annuler en certains points du contour. Si le contour est elliptique ou en forme de triangle équilatéral, on a ainsi une solution exacte; s'il a la forme d'un carré, M. Boussinesq fait le calcul numérique jusqu'au polynome du douzième ordre, et compare les résultats à ceux de la solution rigoureuse de Fourier. Diverses considérations sur la filtration de l'eau ou la transpiration d'un gaz à travers le sable terminent le Mémoire.

Lery (*Georges*). — Sur la fonction de Green pour un contour algébrique (49-136).

M. Lery introduit la notion d'*image* d'un point A par rapport à une courbe algébrique Γ : une droite isotrope passant par A coupe Γ en *m* points; les secondes droites isotropes passant par chacun de ces *m* points contiennent chacune un point réel; ces derniers points sont les images de A. Cette notion conduit à des propriétés de la fonction de Green, grâce auxquelles celle-ci est formée très élégamment dans plusieurs cas, inédits ou non : intérieur ou extérieur de l'ellipse, cubique à point double isolé, limaçon de Pascal à point double isolé, épicycloïde, courbe de Cassini, etc. La notion de *famille isotherme algébrique* permet de former la fonction de Green dans d'autres cas. Les aires limitées par des cercles et l'étude des courbes algébriques quelconques conduisent enfin l'auteur à des propriétés intéressantes, dont certaines concernent les fonctions automorphes de Poincaré.

Vessiot (*E.*). — Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, à une fonction inconnue (137-160).

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLIV, 1920, p. 35.

Soit

$$\frac{dx_0}{dt} = W(t; x_0, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) \qquad \left(p_k = \frac{dx_0}{dx_k}\right)$$

une équation aux dérivées partielles; soit (g_0) le groupe des transformations en $t, x_0, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ qui laissent invariantes toutes ses solutions; soit (g) le groupe des transformations qui n'altèrent pas l'équation. M. Vessiot dit que l'équation est *réductible* s'il existe un groupe contenu dans (g), contenant (g_0), autre que (g), dont les équations de définitions soient rationnelles; le plus petit de ces groupes est le *groupe spécifique*. Il applique cette notion au cas de $n = 1$.

Boussinesq (*J.*). — Supplément à un Mémoire des *Annales* Sur les principes de la Mécanique, etc., inséré en novembre 1910 et déjà complété par un autre Mémoire en décembre 1912. Réflexions sur la longue durée de la dynamique rudimentaire d'Aristote, et sur son rôle capital jusqu'au jour où fut créée l'analyse infinitésimale (161-175).

Ce Mémoire renferme une curieuse hypothèse sur la manière dont se forma la mécanique d'Aristote. Selon M. Boussinesq, certaines parties des sciences modernes sont aussi rudimentaires que la dynamique d'Aristote.

Villat (*Henri*). — Sur l'écoulement des fluides pesants (177-214).

M. Villat traite d'abord le problème d'un liquide s'écoulant entre deux parois fixes, l'une indéfinie, l'autre indéfinie seulement en amont; il aborde ensuite d'autres questions se traitant à peu près de même. La question se ramène à la résolution d'une équation intégrale contenant deux fonctions inconnues, dont l'une caractérise le mouvement à la surface libre et l'autre la forme des parois solides. C'est par rapport à cette dernière fonction que l'équation est le plus simple : équation de première espèce singulière; M. Villat montre comment on peut la résoudre. Mais si l'on donne la forme des parois, l'équation est très compliquée par rapport à l'autre fonction : l'auteur traite le cas du canal à fond rectiligne indéfini, pour le ramener à une autre équation intégrale dont il dit quelques mots. En terminant, M. Villat signale le cas où le mouvement à étudier possède une périodicité géométrique.

Roy (*Louis*). — Sur le mouvement à trois dimensions des milieux visqueux indéfinis (215-232).

M. Roy ramène la question à la recherche de la solution de l'équation en φ :

$$A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\varphi}{dx^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

où A et a^2 sont deux constantes positives, astreintes à s'annuler à l'infini d'une

certaine manière et à satisfaire à certaines conditions initiales. Il étudie à part le cas où $a = 0$, utile pour le cas d'un milieu fluide.

Picard (*Émile*). — Sur quelques points de l'histoire des représentations conformes (233-236).

M. Picard reproduit le passage de son *Traité d'Analyse* relatif à la correspondance entre les points des contours des aires, dans le cas où ceux-ci sont formés d'arcs de lignes analytiques. Cette reproduction est motivée par des travaux de MM. Koebe, Caratheodory et Lindelöff.

Giraud (*Georges*). — Sur une classe de groupes discontinus de transformations birationnelles quadratiques et sur les fonctions de trois variables indépendantes restant invariables par ces transformations (237-403).

Thèse, analysée dans ce *Bulletin*, t. XL, 1916, 1re Partie, p. 232.

GEORGES GIRAUD.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.
Série III, Tome XXII, 1914 (1).

Picone (*Mauro*). — Sulle superficie flessibili ed inestendibili deformabili in rigate [Sur les surfaces flexibles et inextensibles déformables en surfaces réglées] (1-62).

Recherche de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface donnée puisse, par déformation, devenir réglée; c'est, dans l'esprit de l'auteur, un préliminaire à l'étude des congruences W dont les nappes focales sont applicables sur des surfaces réglées. Quelques applications de la condition obtenue.

Cette condition est qu'une fonction $\lambda(u, v)$, qu'on peut toujours déterminer par résolution d'une équation du deuxième degré, vérifie une certaine équation aux différentielles totales; les géodésiques rectifiables ont alors l'équation $dv - \lambda\, du = 0$. Pour l'établir, l'auteur part des équations qui caractérisent les systèmes d'asymptotiques virtuelles; on pourrait aussi partir de la relation

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{2\rho}\frac{d\rho}{ds},$$

bien immédiate, si $-\frac{1}{\rho^2}$ est la courbure totale, si $\frac{d}{ds}$ désigne les dérivées prises

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLIV, 1920, 2e Partie, p. 25.

suivant les géodésiques rectifiables, $\frac{1}{r}$ la courbure géodésique des trajectoires orthogonales. Notons aussi que l'équation du deuxième degré en λ résulte immédiatement de la formule évidente

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} - \frac{1}{2\rho}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - \frac{2}{\rho} = 0.$$

Del Re (*A.*). — Sulle equazioni generali per la Dinamica negli spazii ad n dimensioni ed a curvatura costante [Sur les équations générales de la Dynamique des espaces à n dimensions et à courbure constante] (63-70).

Formation de ces équations, extension des concepts fondamentaux.

Nielsen (*Niels*). — Recherches sur les suites régulières et les nombres de Bernoulli et d'Euler (71-115).

Les Mémoires consacrés par l'auteur à la théorie des nombres de Bernoulli et d'Euler sont intéressants par le caractère élémentaire des méthodes et le souci, qui n'est point superflu, de relier entre eux les résultats, anciens ou nouveaux, en les rattachant à d'autres plus généraux. M. Nielsen s'occupe ici plus particulièrement de la formation des relations de récurrence entre les nombres envisagés. Le lien est ici la notion de suite régulière : suite de polynomes

$$f_p(x) = \sum_{0}^{p}{}_s\, a_s \frac{x^{p-s}}{(p-s)!} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(-1)^p f_p(-x-1) = f_p(x)$$

et dont, à l'aide par exemple des fonctions de Bernoulli, on a l'expression

$$\frac{1}{2} f_p(x) = \sum_{0}^{\leq \frac{p}{2}}{}_s\, a_{2s+1} B_{p-2s}(x).$$

Les formules fondamentales se déduisent de la considération de suites régulières du genre de celle que forment les polynomes

$$\frac{1}{p!} \sum_{1}^{n-1}{}_s \left(x + \frac{s}{n}\right)^p.$$

Parmi les nombreuses applications, citons, par exemple, ce résultat : $\frac{p^{n+1}(p^{2n}-1)}{2n} B_n$ est, en même temps que p, un entier.

Brussotti (*Luigi*). — Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata [Sur la génération de courbes planes algébriques réelles par petite variation d'une courbe décomposée] (117-169).

Dans les recherches sur le nombre, la disposition et l'allure des circuits d'une courbe plane algébrique, pour construire effectivement une courbe satisfaisant à des conditions assignées, on procède souvent par petite variation d'une courbe décomposée : on cherche à répondre à la question par une courbe d'équation

$$f_1 f_2 \cdots f_n + tg = 0,$$

le paramètre t étant petit et d'un signe convenable.

M. Brussotti soumet cette méthode à une étude systématique de grand intérêt. Son Mémoire comprend deux parties bien distinctes.

C'est d'abord une étude de la question du point de vue topologique : préliminaires sur les systèmes de circuits du plan projectif, définition des petites variations d'un système de a circuits (qui feront disparaître les points communs aux divers circuits), étude de la limite supérieure a' du nombre des circuits du système varié (exemple : $a' = a + k - 1$, s'il y a k intersections).

Reste à montrer, ce que fait l'auteur dans la deuxième Partie du Mémoire, qu'une petite variation, topologiquement déterminée, peut s'effectuer algébriquement, comme il a été indiqué. Il établit enfin les conditions pour que la petite variation engendre une courbe ayant le nombre de circuits maximum compatible avec son ordre (5 cas différents, le nombre des f_i ne pouvant dépasser 4).

Maggi (*Gian-Antonio*). — Sul Teorema di Kirchhoff traducente il Principio di Huygens [Sur le théorème de Kirchhoff exprimant le principe de Huygens] (171-177).

Exposé plus simple d'une démonstration de ce théorème déjà donnée par l'auteur (*Annali*, série II, t. XVI).

Wilensky (*Michael*). — Bestimmung der Koeffizienten in einer Funktionalgleichung nebst einer Anwendung [Détermination des coefficients dans une équation fonctionnelle avec une application] (179-189).

Il s'agit des relations

$$F_1 = \frac{d}{dx} F_0, \qquad F_{n+1} - F_{n-1} = 2\frac{d}{dx} F_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

entre fonctions de la variable x. En partant du cas particulier $F_0 = e^{x \operatorname{sh} z}$, l'auteur détermine les coefficients de la formule qui exprime linéairement les F_n

en fonction de F_0 et de ses dérivées. Application à retrouver diverses expressions des fonctions O_n de Neumann.

Eisenhart (*Luther-Pfahler*). — Transformations of Surfaces of Guichard and Surfaces applicable to Quadrics [Transformations de surfaces de Guichard et surfaces applicables sur des quadriques] (191-247).

Soit donnée une surface S de Guichard, c'est-à-dire telle qu'on puisse lui associer une $\overline{S}$ ayant même image sphérique des lignes de courbure et telle que les rayons de courbure principaux soient liés par la relation

$$r_1\overline{r}_2 + \overline{r}_1 r_2 = \text{const.} \neq 0;$$

l'auteur en étudie les transformations telles que la surface et sa transformée constituent l'enveloppe d'une famille de sphères, avec correspondance des lignes de courbures.

L'analogie de ces transformations, avec les transformations D_n des surfaces isothermes découvertes par Darboux, nous dispense d'entrer dans le détail; l'auteur en établit le théorème de permutabilité; il étudie, à la fin de son Mémoire, le cas des surfaces de Guichard spéciales (analogues aux surfaces isothermes spéciales), auxquelles on peut associer (comme enveloppe des plans des cercles normaux à deux surfaces complémentaires) une surface applicable sur une quadrique.

Nielsen (*Niels*). — Sur le théorème de v. Staudt et de Th. Clausen relatif aux nombres de Bernoulli (249-261).

C'est le théorème qui donne l'expression de B_n contenant les nombres premiers de rang n. Cette expression, portée dans une quelconque relation de récurrence entre les B_n, a diverses conséquences, par exemple la congruence

$$\sum_{s=1}^{\frac{m-1}{p-1}} \alpha_{n+s} = 0 \pmod{p},$$

entre les coefficients de la relation. En particularisant cette relation, on retrouve nombres de résultats classiques.

Bianchi (*Luigi*). — Sulle congruenze rettiline W a parametro medio costante [Sur les congruences rectilignes W à paramètre moyen constant] (263-323).

Le paramètre moyen d'un rayon de la congruence est la quantité $a = \sqrt{d^2 - \lambda^2}$, d étant la distance des points limites, λ celle des foyers. Les congruences W

à paramètre moyen constant comprennent donc, comme cas particulier, les congruences W normales et les congruences pseudo-sphériques, dont on sait l'importance. La détermination de ces congruences, dont on se donne une nappe focale S, présente, comme le montre l'auteur, des circonstances bien différentes suivant que la courbure de S est variable (il ne peut exister alors plus d'une congruence répondant à la question ou constante $\left(\text{il en existe une double infinité; cas d'exception } K = -\frac{1}{a^2}\right)$.

Dans la suite de son Mémoire, l'auteur revient d'abord sur l'intégration du système aux différentielles totales dont dépend la recherche des congruences cherchées quand S est à courbure constante : la transformation de Lie-Bonnet permet de se ramener au cas simple où $a = 0$, de sorte que l'intégration est effectuée dès que l'on connaît les surfaces dérivées de S par une transformation de Lie-Bonnet et leurs lignes géodésiques.

Pour terminer, l'auteur étudie une nouvelle catégorie de congruences W à paramètre moyen constant : celles pour lesquelles les équations de Moutard des deux nappes focales ont la forme $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0$. Il retrouve ainsi les congruences de Darboux $\left(\text{définies à partir des surfaces de translation dont les courbes génératrices ont des torsions constantes } \frac{1}{c^2}, -\frac{1}{c_1^2}\right)$. Il généralise, pour les catégories précédentes de congruences, la théorie des transformations qui, dans le cas des congruences pseudo-sphériques, dérive du théorème de permutabilité.

Enriques (*Federico*). — Compte rendu des « Œuvres mathématiques de Luigi Cremona » (327-330).

JOSEPH PÉRÈS.

ANNALI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA: SCIENZE FISICHE ET MATEMATICHE.

Vol. IX, 1904 (1).

Fubini (*G*). — [Q 1] Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici [Le parallélisme de Clifford dans les espaces elliptiques] (1-74).

Dans un espace de courbure $+1$ étant x_i, x'_i les coordonnées de Weierstrass

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLI, 1917, 2e Partie, p. 31.

de deux positions d'un point, les glissements sont définis par

$$\begin{aligned}
x'_1 &= Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4,\\
x'_2 &= Bx_1 + Ax_2 - Dx_3 - Cx_4,\\
x'_3 &= Cx_1 + Dx_2 + Ax_3 - Bx_4,\\
x'_4 &= Dx_1 - Cx_2 - Bx_3 + Ax_4
\end{aligned}$$

(glissements de première espèce), et par

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \alpha x_1 - \beta x_2 - \gamma x_3 - \delta x_4,\\
x'_2 &= \beta x_1 + \alpha x_2 + \delta x_3 - \gamma x_4,\\
x'_3 &= \gamma x_1 - \delta x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4,\\
x'_4 &= \delta x_1 + \gamma x_2 - \beta x_3 - \alpha x_4
\end{aligned}$$

(glissements de seconde espèce), et entre les *paramètres de glissement* ont lieu les relations

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

En prenant sur une droite deux points (x), (ξ) *conjugués* $\left(\text{dont la distance est } \frac{\pi}{2}\right)$, on

$$\xi x_i \xi_i = 0$$

et il y a deux glissements, l'un de première et l'autre de seconde espèce qui portent (x) en (ξ), et l'on trouve que pour ces glissements il doit être

$$A = \alpha = 0.$$

Comme une droite est déterminée par les paramètres de glissement, l'auteur prend B, C, D, β, γ, δ comme coordonnées de la droite. Dans le but de simplifier les calculs, il introduit de nouveaux symboles comme il suit :

Soient $(t_1 t_2 t_3 t_4)$ et $(d_1 d_2 d_3 d_4)$ deux groupes de variables et posons

$$[td]_2 = \begin{vmatrix} t_2 & t_1 \\ d_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_4 & t_3 \\ d_4 & d_3 \end{vmatrix} \qquad [td]'_2 = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix},$$

$$[td]_3 = \begin{vmatrix} t_3 & t_1 \\ d_3 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_2 & t_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix} \qquad [td]'_3 = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix},$$

$$[td]_4 = \begin{vmatrix} t_4 & t_1 \\ d_4 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_3 & t_2 \\ d_3 & d_2 \end{vmatrix} \qquad [td]'_4 = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}.$$

On a alors

$$\Sigma_i \{[td]_i [ef]_i\} = \left\| \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{matrix} \right\|$$

$$+ \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix};$$

2 ème Partie

et, en indiquant le déterminant par $(tdef)$,

$$\Sigma_i \{ [td]_i [ef]_i \} = \Sigma te . \Sigma df - \Sigma tf . \Sigma de + (tdef).$$

On peut exprimer $(tdef)$ par les produits des t et des d, et l'on trouve, pour le cas $t_i = e_i$, $d_i = f_i$, $\Sigma t^2 = \Sigma d^2 = 1$, $\Sigma td = 0$:

$$\Sigma \{ [td]_i [ef]_i \} = 1$$

(c'est le cas des B, C, D pour lesquelles il est bien $B^2 + C^2 + D^2 = 1$).

Pour le cas où

$$\Sigma t^2 = \Sigma d^2 = \Sigma e^2 = \Sigma f^2 = 1,$$
$$\Sigma td = \Sigma te = \Sigma tf = \Sigma de = \Sigma df = \Sigma ef = 0,$$

on a

$$\Sigma \{ [td]_i [ef]_i \} = \pm 1.$$

et pour le cas où

$$e_i = t_i, \qquad d_i \gtrless f_i, \qquad \Sigma ed = \Sigma ef = \Sigma df = 0,$$
$$\Sigma e^2 = \Sigma d^2 = \Sigma f^2 = 1,$$

on a

$$\Sigma \{ [td]_i [ef]_i \} = 0.$$

Or, comme on a

$$B = [\Sigma x]_2', \qquad C = [\Sigma x]_3, \qquad D = [\Sigma x]_4,$$
$$\beta = [\Sigma x]_2', \qquad \gamma = [\Sigma x]_3', \qquad \delta = [\Sigma x]_4'$$

les relations trouvées servent à rendre plus simples les calculs avec les paramètres de glissement, et le passage de ceux-ci aux coordonnées de Weierstrass.

Les formules qui donnent au moyen des paramètres les coordonnées du point où la droite rencontre le plan $x_1 = 0$ sont

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{B + \beta}{\sqrt{2(1 + B\beta + C\gamma + D\delta)}}, \qquad x_3 = \frac{C + \gamma}{\sqrt{2(1 + B\beta + C\gamma + D\delta)}},$$
$$x_4 = \frac{D + \delta}{\sqrt{2(1 + B\beta + C\gamma + D\delta)}}.$$

Deux droites parallèles ont leurs paramètres d'un même groupe (les B, C, D ou les β, γ, δ) égaux ou opposés; ce qui distingue les deux sens de parallélisme, c'est que ce fait se vérifie pour l'un ou pour l'autre groupe de paramètres.

Les six paramètres, que l'on peut aussi considérer comme coordonnées homogènes (liées par une relation), sont les coordonnees de Klein obtenues en supposant le tétraèdre fondamental autoconjugué par rapport à l'absolu.

On appelle *images de Clifford* d'une droite relativement à un plan α, les traces sur ce plan des parallèles à la droite tirées par le pôle A du plan. Ces points sont employés plusieurs fois par l'auteur dans la suite.

Au moyen des nouvelles coordonnées, on définit l angle de deux droites. Étant (B, C, D, β, γ, δ), (B', C', D', β', γ', δ') ces droites, leur angle est celui qui est défini par

$$\cos\varphi = BB' + CC' + DD'$$

aussi bien que celui qui est défini par

$$\cos\varphi = \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta';$$

ou, en passant aux coordonnées de Weierstrass,

$$\cos\varphi = \Sigma\,[x\xi]_i\,[y\eta]_i$$

ou

$$\cos\varphi = \Sigma\,[x\xi]'_i\,[y\eta]'_i,$$

d'où

$$\cos\varphi = \cos\widehat{xy}\,\cos\widehat{\xi\eta} - \cos\widehat{\xi y}\,\cos\widehat{x\eta} \pm (x\xi\,y\eta).$$

Si les deux droites sont dans un plan

$$(x\xi\,y\eta) = 0$$

et l'angle est unique.

Un élément (A, α) constitué par un point A et un plan α passant par A est parallèle à l'élément (B, β) lorsqu'il y a un glissement qui porte A en B et α en β. La distance AB est égale à l'angle $\alpha\beta$, et l'on en déduit l'existence de figures corrélatives, à éléments correspondants parallèles, sans aucune considération de l'absolu.

En reprenant les formules de Frenet, généralisées par M. Bianchi, l'auteur obtient des résultats remarquables dans la théorie des courbes, en introduisant aussi un élément nouveau, la *torsion de Clifford*.

Les congruences dans un espace courbe ont été etudiées par M. Fibbi (ces *Annali*, t. VII, 1895). L'auteur, par l'application de la théorie des parallèles et des images de Clifford, trouve les conditions auxquelles doivent satisfaire les formes définissant une congruence, la manière de reconnaître si une congruence est W, et de nouveaux résultats relatifs à la *densite*.

L'application à la théorie des surfaces porte, entre autres, à de nouvelles interprétations de la courbure absolue et de la torsion géodésique.

L'étude de la représentation riemannienne des droites parallèles conduit à une nouvelle propriété des surfaces isocycliques de Demartres.

Fubini (*G.*). — [H 10*d*] I principi fondamentali della teoria delle funzioni armoniche negli spazi a curvatura costante [Les principes fondamentaux de la théorie des fonctions harmoniques dans les espaces à courbure constante] (1-39).

Au moyen des propriétés de certaines intégrales, l'auteur montre qu'on peut étendre à ces espaces les méthodes de Neumann (*Logaritmisches und Newtonsches Potential*). Puis il résout le problème de Dirichlet pour la sphère et enfin il donne des développements en série pour les fonctions harmoniques en en déduisant l'extension de quelques théorèmes de M. Appell, comme par exemple

« On peut construire une fonction harmonique ayant un ensemble donné de points singuliers avec des singularités données (n'ayant pas de points limites à distance finie). »

Étant donnée une fonction harmonique (régulière ou non) qui existe dans un champ Σ, l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{dU}{du}\,d\sigma$$

(σ étant le contour de Σ) est égale à la somme des résidus de U dans Σ.

Grassi (*U.*). — [S 2*e*, α, β] Studi d'idrodinamica [Études d'hydrodynamique] (1-84).

1. Recherche de la fonction des vitesses d'un liquide indéfini où se trouve plongé un ellipsoïde dont la surface se déforme homographiquement.

2. *Ellipsoïde pulsant.* — Expression de la fonction des vitesses. Étude de la distribution de la pression du liquide sur la membrane ellipsoïdique (les lignes d'égale pression sont des polhodies). Réduction aux quadratures de l'intégration des équations du mouvement. Le déplacement de tout point du liquide dépend uniquement des grandeurs initiale et finale de l'ellipsoïde, et ne dépend nullement de la manière plus ou moins rapide dont l'ellipsoïde s'est déformé.

IIe Partie. — Après des propositions (n° 1) relatives au maximum d'une fonction potentielle harmonique et d'autres propositions (n° 2) relatives aux mêmes fonctions, l'auteur étend (n° 3) les résultats obtenus par Bjerknes pour les corps pulsants autour de centres fixes. Dans le n° 4, il traite le problème suivant : « Dans le liquide sont plongés deux corps pulsant périodiquement autour de deux centres fixes. En supposant la distance R des centres telle qu'on puisse négliger $\frac{1}{R^4}$, quels sont les moments du système des pressions du liquide sur l'un des corps suivant les axes du *système principal*, que l'on suppose avoir une orientation invariable. » Ce système principal est obtenu de la manière suivante : Étant σ la surface du corps pulsant, on envisage une surface σ' coïncidant avec σ et ayant en chaque point une densité (positive ou négative) égale à la composante normale de la vitesse; les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie de σ' forment le système appelé *principal*.

5. Soient dans le liquide plusieurs corps dont le contour de chacun ait en chaque instant six plans de symétrie orthogonale, trois desquels formant un trièdre trirectangle et les autres étant les plans bissecteurs. Étant donné le mouvement de ces corps, quelle est la résultante du système de pressions du liquide sur chacun d'eux, en supposant qu'on puisse négliger $\frac{1}{R^3}$, où R est la plus petite distance entre les centres.

Rimini (*C.*). — [J 4]. Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti [Sur les espaces à trois dimensions admettant un groupe à quatre paramètres de mouvements] (1-57).

En se fondant sur les résultats de M. Bianchi [*Sugli spazi a tre dimen-*

sioni, etc. (*Mem. della Soc. Ital. delle Scienze*, série 3ᵃ, t. XI, 1897)], l'auteur donne la classification de ces espaces :

$$(\mathrm{I}) \qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1\,dx_2\,dx_3 + (x_1^2+1)\,dx_3^2,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1}\,dx_2^2 + 2ne^{x_1}\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2 \qquad (n^2<1),$$

$$(\mathrm{III}) \quad ds^2 = dx_1^2 + (\sin^2 x_1 + n^2\cos^2 x_1)\,dx_2^2 + 2n\cos x_1\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2 \qquad (n^2>1).$$

Le groupe à quatre paramètres, que l'espace admet comme groupe complet de mouvements, est nécessairement transitif et systatique. L'espace a les trois courbures principales constantes : deux de ces courbures sont égales et positives, la troisième est négative pour (I) et (II) et en valeur absolue triple des deux autres pour (I), supérieure à ce triple pour (II). Pour (III), la troisième peut être négative ou positive; si elle est négative, la valeur absolue en est inférieure au triple des deux autres. Les lignes principales correspondant à la troisième courbure sont des géodésiques de l'espace et sont les variétés systatiques du groupe de mouvements.

Si l'élément linéaire

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ik}\,dx_i\,dx_k$$

de l'espace S_n admet la transformation infinitésimale Xf, l'équation des géodésiques possède l'intégrale première

$$\sum_1^n a_{ik}\,\xi_i\,\frac{dx_k}{ds} = \text{const.}$$

En se fondant sur ce théorème, dont il donne une interprétation géométrique, l'auteur recherche les équations des géodésiques en termes finis. Cette intégration se réduit à des opérations algébriques et à des quadratures lorsque l'on connaît les transformations infinitésimales génératrices du groupe. Pour le type (I), on trouve :

$$x_1 = a_4 \sin a_1 s - a_5 \cos a_1 s + \frac{a_2}{a_1},$$

$$x_2 = a_5 \sin a_1 s + a_4 \cos a_1 s + \frac{a_3}{a_1},$$

$$x_3 = \int_0^s [a_1(x_1^2+1) - a_2 x_1]\,ds + a_6,$$

les a étant des constantes arbitraires.

Dans S_n une hypersurface est *totalement géodésique* si chacune de ses géodésiques est aussi géodésique pour S_n, et la condition pour que cela ait lieu est que la seconde forme fondamentale soit identiquement nulle.

Dans un S_3 admettant un groupe G_4 de mouvements, il n'y a de surfaces totalement géodésiques que lorsque le groupe dérivé de G_4 est intransitif.

Le paragraphe 5 est relatif aux hypersurfaces à lignes de courbure indéterminées.

Le dernier paragraphe contient des représentations des espaces considérés précédemment et les équations en termes finis du groupe de mouvements.

Les espaces (II) et (III) sont les seuls qu'on puisse représenter conformément sur l'espace euclidien.

Vitali (*G.*). — [H5] Sopra le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti algebrici [Sur les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients algébriques] (1-57).

Continuation des études entreprises par l'auteur dans les *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XVI, 1902.

Étant donné le groupe d'une équation d'Appell du deuxième ordre et de première ou de seconde espèce, et p étant le genre des coefficients algébriques, il y a en général $2p-2$ équations d'Appell du deuxième ordre, appartenant à ce groupe et linéairement indépendantes, dont l'équation intégrale est de première espèce.

Le nombre des équations d'Appell du deuxième ordre, appartenant à un même groupe et linéairement indépendantes, dont l'équation intégrale est de première espèce, n'est jamais supérieur à $2p$; il peut être $2p-2$, $2p-1$ ou $2p$.

Voici les titres de quelques-uns des articles qui suivent :

Relations entre les pôles et les résidus des intégrales des équations d'Appell du deuxième ordre et de première catégorie (c'est-à-dire de première ou de seconde espèce).

Modules de périodicité des équations intégrales de première catégorie.

Relations entre les modules de périodicité des solutions de deux équations intégrales de première espèce d'équations à solutions contragrédientes.

Équations intégrales de troisième espèce.

Vol. X, 1908.

Cipolla (*I.*). — [$M_1$2] I punti di Weierstrass sopra una curva algebrica [Les points de Weierstrass sur une courbe algébrique] (1-36).

Les *points de Weierstrass* sur une courbe de genre $p>1$ sont les points p-uples (au moins) pour la série canonique g_{2p-2}^{p-1}. Pour les courbes hyperelliptiques, ces points sont les $2p+2$ points doubles de la g_2', et chacun de ces points compte pour $\frac{p(p-1)}{2}$ points de Weierstrass.

Pour une courbe non hyperelliptique, en indiquant par $i, i_1, \ldots, i_{p-3}, i_{p-2}$ les multiplicités d'un point de Weierstrass pour $\infty^{p-2}, \infty^{p-3}, \ldots, \infty^1$, 1 groupes canoniques, on a toujours $i=1$, $i_k \leqq 2k+1$ pour $k<p-2$, et $i_{p-2} \leqq 2p-2$, comme l'a prouvé M. Segre [*Intorno ai punti di Weierstrass*, etc. (*Rend. dei Lincei*, 1899)]. L'auteur, en suivant une voie indiquée par M. Segre lui-même, arrive à abaisser la limite supérieure de i_k pour $p>6$ et $1<k<p-3$.

Le nombre des points de Weierstrass est $(p-1)p(p+1)$.

Suivent d'autres recherches, entre autres la représentation d'une courbe de genre p ayant un point de Weierstrass d'espèce donnée, au moyen d'une courbe plane C_{p+2}.

Levi (*E.-E.*). — [Q 2] Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio [Essai sur la théorie des surfaces à deux dimensions dans un hyperespace] (1-99).

On a une telle surface en supposant les coordonnées cartésiennes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fonctions de u_1, u_2, étant

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \end{matrix} \right\| \neq 0.$$

Pour un *mouvement* (y compris la symétrie)

$$(1) \qquad x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{in} x_n + a_i$$

(les α_{ij} étant les coefficients d'un système orthogonal), on a pour les dérivées

$$(2) \qquad \frac{\partial^{h+k} x_i}{\partial u_1^h \, \partial u_2^k} = x_{i,hk} = \alpha_{i1} x_{1,hk} + \ldots + \alpha_{in} x_{n,hk},$$

et les invariants différentiels de la surface pour le groupe des mouvements sont les invariants finis du système de variables x_i, $x_{i,hk}$ pour le groupe (1), (2).

Les expressions

$$I_{hk,h_1k_1} = \Sigma x_{i,hk} \, x_{i,h_1k_1}$$

forment un système complet d'invariants, et $h + k = h_1 + k_1$ est l'*ordre* de I. Entre les $\frac{m(m+1)}{2}$ invariants I formés avec m systèmes de dérivées, dont n sont linéairement indépendants, il y en a $\frac{n(2m-n+1)}{2}$ indépendants, et l'auteur résout complètement le problème de trouver ces invariants et de déterminer ceux qui sont suffisants à individuer la surface.

Puis il trouve les invariants absolus en cherchant l'effet d'une transformation des variables u_1, u_2 sur les invariants I. Ayant trouvé les conditions pour la congruence de deux surfaces, il en déduit que les seules surfaces admettant un groupe G_3 de mouvements sont les sphères de S_3.

Suit une généralisation du théorème de Meusnier, et l'étude de la courbure des sections normales.

Après avoir fait la distinction des trois espèces de points : points *génériques*, *planaires* et *axiaux* et une classe spéciale de points planaires qu'il appelle *paraboliques*, il étudie les surfaces à points axiaux et celles à points planaires ; les premières sont des surfaces de S_3 ou des surfaces développables ; les secondes, à points non paraboliques, sont celles qui contiennent un réseau de Guichard. A cette classe appartiennent les surfaces de translation dont les surfaces minima sont un cas particulier.

Medici (*S.*). — [J 4] Sui gruppi di rotazioni [Sur les groupes de rotations] (1-160).

Étant $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées dans S_n, une rotation infinitésimale est une transformation

$$\Sigma_{ik}\, c_{ik}(x_i p_k - x_k p_i) \qquad (c_{ik} = -c_{ki}),$$

où

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

L'auteur trouve tous les groupes dont les transformations ont cette forme, c'est-à-dire tous les sous-groupes du groupe $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \ldots, n;\ i \neq k);$$

ce sont les *groupes de rotations*.

Les groupes G_2 de rotations sont des groupes abéliens.

Un groupe G_r abélien de rotations sur n variables, a au plus le degré

$$\left[\frac{n}{2}\right] - r + 1,$$

en entendant par *degré* le plus petit degré des rotations infinitésimales du groupe.

Étant $G_r \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_r)$ un groupe abélien de rotations, si l'on a

$$[R_1(R_1 R_2)] = k R_2 f,$$

k doit être nul ou négatif, $k = -\rho^2$. On dit que $R_2 f$ par rapport à $R_1 f$ *appartient au facteur* ρ (considéré toujours comme étant positif).

Dans un G_r non abélien, en considérant $G_t \equiv (R_1, R_2, \ldots, R_t)$ abélien et non contenu en aucun G_{t+1} abélien de G_r, on a

$$r - t = 2s \qquad (s \text{ entier})$$

et les autres $2s$ rotations génératrices du groupe

$$R_{t+1} f, \quad \ldots, \quad R_{t+2s} f$$

peuvent se prendre de manière à être irréductibles et à avoir

$$(R_i R_{t+2k-1}) = \rho_{ik} R_{t+2k} f, \qquad (R_i R_{t+2k}) = -\rho_{ik} R_{t+2k-1} f$$
$$(i = 1, \ldots, t;\ k = 1, \ldots, s).$$

Autres théorèmes relatifs à la composition des groupes de rotations.

Forme canonique des groupes G_3. Groupes ne contenant pas G_8 et G_{10}. Leur forme normale. Groupes ne contenant pas G_8. Groupes généraux.

Picone (*M.*). — [H 5 *j* α] Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine [Sur

un problème aux limites pour les équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre] (1-95).

Intégration de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y A(x) = 0 \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$a_1 [y]_a + a_2 \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \alpha,$$

$$b_1 [y]_b + b_2 \left[\frac{dy}{dx}\right]_b =$$

dans les quatre cas suivants :

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 0,$$
$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b_2 = 1,$$
$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 1,$$
$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad b_2 = 0.$$

Le premier a été étudié par M. Picard (*Traité d'Analyse*), le second par M. Mason (*Math. Ann.*, t. 58).

Existence et propriétés des solutions et fonction relative de Green (la même pour les quatre cas). Étude de la distribution des zéros d'une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) y = 0$$

et de sa dérivée. Étude de certaines fonctions transcendantes entières ayant pour zéros les inverses des constantes de situation relatives aux deux derniers des quatre cas mentionnés.

Enfin, intégration de (1) et de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y A(x) = f(x)$$

avec les conditions aux limites des deux derniers cas, $A(x)$ et $f(x)$ étant finies et continues. Dans cette recherche, l'auteur applique les résultats de Fredholm sur les équations intégrales linéaires.

S. Rindi.

2 série — Partie

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

6e série, T. VI, 1910 (1).

Denjoy (A.). — Sur les produits canoniques d'ordre infini (1-136).

Ce Mémoire reprend divers résultats obtenus par M. Borel, suivi de M. Craft, et par MM. Boutroux et Lindelöf.

MM. Boutroux et Lindelöf ont résolu le problème suivant : Connaissant le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro a_n d'une fonction entière, en déduire les limites du module maximum de cette fonction, dans le cas où la suite r_n est de genre fini, où la série $\frac{1}{r_n^{p+1}}$ est convergente pour une certaine valeur entière de p.

M. Denjoy étudie le même problème dans le cas où la suite r_n est d'ordre infini et où les produits

$$\prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

satisfont aux conditions que voici :

Soit $e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}$ le maximum du module du $n^{\text{ième}}$ facteur sur le cercle $|z| = r$; on supposera que la série

$$\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = P(r)$$

est un fonction de r telle qu'il n'y ait pas possibilité de la rendre moins croissante par un autre choix de l'exposant p_n, fonction de n.

Boutroux (P.). — Sur les singularités des équations différentielles rationnelles du premier ordre et du premier degré (137-199).

M. Boutroux étudie les equations

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (P \text{ et } Q \text{ polynomes en } x, y)$$

et cherche à réduire les singularités de ces équations à un petit nombre de types dont l'équation

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \text{polynome en } x, y$$

fournit les spécimens les plus simples, d'où cette conséquence que l'analyse de

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, 2e Partie, p. 30.

l'équation (2) conduit à une classification générale des singularités transcendantes présentées par les équations différentielles du premier ordre.

L'auteur de ce Mémoire répartit les singularités transcendantes de l'équation (1) en trois classes :

a. Points ξ qui sont pour des valeurs isolées de y, des racines du système des deux équations algébriques

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0;$$

b. Points ξ qui sont, quel que soit y, des pôles du premier ordre du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$;

c. Points ξ qui sont, quel que soit y, des pôles d'ordre supérieur à 1 du coefficient différentiel $\frac{P}{Q}$; et il étudie successivement ces classes.

Roy (*L.*). — Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides (201-269).

La théorie classique de l'élasticité, telle qu'elle a été établie par Navier, étudie les lois auxquelles obéissent les déformations infiniment petites des corps, dont la température est uniforme et invariable. La théorie de Fourier, qui concerne la propagation de la chaleur dans les solides, suppose que la configuration de ces corps n'est pas modifiée par les variations successives de leur température.

Duhamel a demandé à ces deux théories qui ne présentent pas de pénétration réciproque, celle des phénomènes thermodynamiques.

Il a notamment appliqué ses calculs à l'étude d'une sphère qui n'est soumise à aucune force extérieure et qui se refroidit.

M. Boussinesq a récemment repris les travaux de Duhamel dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, en se bornant, comme son devancier, aux corps étendus en toutes dimensions.

M. Roy étudie ici le cas des plaques et des tiges, d'abord celui des plaques homogènes et isotropes, ensuite celui des tiges droites; il termine par la recherche de la loi de variation de la température dans une tige primitivement au zéro thermométrique, et mise en mouvement par des actions mécaniques.

Duport (*H.*). — Sur l'élimination des longitudes dans le problème des trois corps (271-342).

Ce Mémoire est divisé en quatre Parties :

I. Détermination de l'orbite d'une planète ou d'une comète au moyen d'observations voisines et surabondantes; en faisant quatre observations, on peut ramener le problème au premier degré et déterminer la masse de la planète inconnue.

II. Étude du système Soleil, Terre, Lune; détermination des masses de ces corps et des rapports de leurs distances au moyen d'observations de direction.

III. Mouvements du Soleil et de la Lune relativement à la Terre, selon la

méthode de Lagrange, avec utilisation des intégrales des aires : ce dernier point constitue une des parties originales de ce travail.

IV. Détermination, par la méthode de Jacobi, du mouvement du système Terre-Lune relativement au Soleil, puis du mouvement de la Lune relativement à la Terre.

Haag (*J.*). — Sur certains mouvements remarquables et leurs applications (343-386).

Soit un trièdre mobile $Oxyz$ ou (T) dépendant d'un paramètre t et admettant les rotations et translations composantes p, q, r, ξ, η, ζ. Supposons que ces six fonctions de t soient liées par $6-n$ relations linéaires et homogènes distinctes, à coefficients constants. Le mouvement du trièdre (T) sera un mouvement (G_n), au sens attribué à ce dernier symbole par M. Haag.

Ce sont ces mouvements G que l'auteur étudie. Ils se relient de façon très étroite aux courbes de Bertrand et donnent lieu à des applications nombreuses, précises et intéressantes, particularité qu'on ne saurait trop signaler, car elle fait trop souvent défaut dans de nombreux Mémoires.

Ne pourrait-on mettre ici en honneur un mot bien souvent prononcé ces années passées : la nécessité absolue du *recoupement* les unes par les autres des théories mathématiques?

Séguier (*M. de*). — Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné (387-436).

Un groupe G de substitutions linéaires, à variables homogènes ou non, représente un groupe abstrait Γ quand G est simplement ou multiplement holomorphe à Γ. Chaque substitution de G qui correspond à une substitution σ de Γ est dite représenter σ. La représentation, d'après M. de Séguier, est propre ou impropre, selon que G est simplement ou multiplement holomorphe à Γ; de plus, deux représentations G, G' de Γ sont équivalentes s'il existe un changement de variables transformant G en G' de telle manière qu'une substitution quelconque s de G et sa transformée s' de G' représentent toujours la même substitution de Γ.

Ces définitions montrent la nature du problème étudié.

R. de Montessus de Ballore.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.
Série III, Tome XXIII, 1914 (1).

Rémoundos (*Georges-I.*). — Sur les familles et les séries de fonctions multiformes dans un domaine (1-25).

Extension à des familles de fonctions algébroïdes dans un domaine, de résul-

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, 2e Partie, p. 59.

tats déjà établis pour des familles de fonctions holomorphes : il s'agit des propriétés relatives au module des fonctions d'une telle famille, et à la convergence des séries extraites de la famille, qui résultent de l'existence de valeurs exceptionnelles. L'auteur avait consacré précédemment à la question un autre Mémoire [1]; il s'occupe ici du cas de trois valeurs exceptionnelles. Il présente par exemple une généralisation du théorème de M. Montel : « Les fonctions $f(z)$, holomorphes dans un domaine D où elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, forment une famille normale »; il traite d'abord le cas où D est un cercle dont le centre est seul point critique des fonctions de la famille, puis le cas général.

Théorèmes concernant les singularités des fonctions limites d'une série de fonctions algébroïdes et la convergence des séries dérivées.

Vâlcovici (*V.*). — Einige Anwendungen der Impulssätze [Quelques applications des théorèmes des quantités de mouvement] (27-40).

Application aux questions suivantes : paradoxe de D'Alembert; calcul de la pression sur un obstacle solide, d'un jet fluide qui vient s'y briser, soit quand le mouvement du fluide a lieu dans un canal indéfini des deux côtés (Prandt), soit dans le cas d'un jet sortant d'une buse.

Étudiant enfin le cas (mouvement plan) d'un courant fluide autour d'un solide, le courant étant caractérisé par une vitesse à l'infini variant linéairement

$$u_\infty = 2\omega y, \qquad v_\infty = 0,$$

et par

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2\omega,$$

il montre que l'action sur le solide, parallèlement au courant, est nulle (contrairement à un résultat de v. Sanden); on voit que cette dernière question se rattache à l'étude du vol dans un vent irrégulier.

Scarpis (*U.*). — Intorno all'interpretazione della teoria di Galois in un campo di razionalità finito [Sur l'interprétation de la théorie de Galois dans un champ de rationalité fini] (41-60).

L'auteur s'occupe de l'application de la théorie de Galois à des équations dont les coefficients et les racines appartiennent à un champ formé d'un nombre fini d'éléments.

Étant donnée une équation de degré ν dont les coefficients appartiennent à un champ de Galois $[p^n]$ [2], irréductible dans ce champ, ses racines appartiennent au champ plus étendu $[p^{nm}]$ si ν divise m. L'équation admet alors un groupe de Galois transitif; les propositions qui constituent la base de la théorie de Galois subsistent (l'auteur suppose ici $m \leqq p^n$). Résolution et discussion du problème de la détermination des racines par des radicaux.

---

[1] *Acta mathematica*, t. XXXVII.

[2] V. Dickson, *Linear groups with an exposition of the Galois field theory* (Teubner).

Tonelli (*Leonida*). — Sulla stabilità dell'equilibrio di una certa massa liquida sottomessa alle sole forze molecolari [Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide soumise aux seules forces moléculaires] (61-106).

On sait que l'on obtient expérimentalement un tel liquide en introduisant de l'huile dans un mélange, ayant même densité, d'eau et d'alcool. Si l'huile s'appuie à deux disques circulaires fixes, on peut obtenir qu'elle se dispose suivant un cylindre ayant pour bases les disques, pourvu que l'on ait, entre le rayon des disques et leur distance, l'inégalité

$$h < 2\pi R.$$

C'est donc la condition pour que le cylindre donne une forme d'équilibre stable.

L'auteur fait l'étude théorique de la question, montrant, en toute rigueur, que sous la condition indiquée le cylindre réalise le minimum du potentiel

$$W = mS - n\Sigma,$$

S étant la surface de séparation huile-eau, Σ la surface de contact huile-disques. Il reprend ainsi le travail de M. Almansi (*Annali*, 1906) en le complétant (le minimum est *fort*). Signalons aussi l'étude des cas limites ($m = n$, $n = 0$) pour les valeurs des coefficients.

Bäcklund (*A.-V.*). — Ueber eine Transformation von Luigi Bianchi [Sur une transformation de L. Bianchi] (107-134).

Il s'agit des méthodes que Bianchi a utilisées dans ses études sur les transformations des surfaces applicables sur les quadriques. Après avoir établi les relations entre l et m pour que les formules

$$x' = x + l\frac{\partial x}{\partial n} + m\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \ldots$$

fassent passer d'une surface $S(x, y, z)$ à une surface S' seconde nappe d'une congruence W, l'auteur forme les conditions pour que, S roulant sur une surface applicable Σ en entraînant avec elle ∞^1 surfaces S', les ∞^3 éléments plans que l'on peut alors associer à Σ, appartiennent à une famille de surfaces Σ'. Dans le cas où S est un hyperboloïde à une nappe et où les S' sont dégénérées en courbes (droites), il retrouve ainsi, à l'exclusion de toutes autres, les transformations de Bianchi (les S' constituant un système de génératrices d'un hyperboloïde homofocal).

Bianchi (*Luigi*). — Ricerche sui sistemi tripli conjugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche [Recherches sur les systèmes triples conjugués avec une famille de surfaces applicables sur des quadriques] (135-214).

Les systèmes dont M. Bianchi aborde ici l'étude généralisent, dans la théorie

des surfaces applicables sur les quadriques, les systèmes triples orthogonaux ayant une famille de surfaces à courbure constante. Ils seront définis par les conditions suivantes :

a. Les surfaces de la série $w = \text{const.}$ sont applicables sur des quadriques;

b. Le système conjugué (u, v) intercepté sur l'une quelconque des surfaces w par les surfaces des deux autres séries est le système conjugué permanent;

c. Les lignes w tracent, sur les surfaces $w = \text{const.}$, une correspondance qui conserve les systèmes conjugués.

On voit que la généralisation s'obtient en envisageant, non plus des systèmes orthogonaux, mais des systèmes conjugués; ceci se rattache au fait que, sur les déformées des quadriques générales, le système conjugué permanent n'est plus orthogonal, mais oblique.

Dans ce premier Mémoire, l'auteur construit et étudie de tels systèmes pour : les déformées des quadriques de révolution, celles des paraboloïdes, celles des quadriques (imaginaires) à centre, tangentes à l'absolu. Les systèmes envisagés sont déduits, soit en termes finis, soit par intégration d'équations différentielles, de formules déjà établies pour les familles de Lamé à courbure constante.

Comessati (*Annibale*). — Sulla connessione delle superficie razionali reali [Sur la connexion des surfaces rationnelles réelles] (215-284).

Les recherches de l'auteur reposent sur la possibilité d'associer à toute surface rationnelle réelle F une transformée réelle Φ dont on sache déterminer directement la connexion; pour la recherche du caractère bilatère ou unilatère de F, il est utile d'assurer que la transformation birationnelle entre F et Φ soit privée de points fondamentaux sur F; on passe (Klein) de la connexion de Φ à celle de F.

Parmi les résultats, nous citerons, par exemple, le suivant : toutes les F à une nappe sont unilatères, exception faite pour celles qui équivalent à une sphère ou à un tore; signalons aussi la relation

$$Z + I = 2(\bar{\rho} - 1)$$

entre l'ordre de connexion Z, l'invariant I de Zeuthen-Segre et $\bar{\rho}$, nombre base réel.

Cisotti (*U.*). — Vene confluenti [Veines confluentes] (285-340).

La rencontre de deux veines liquides donne naissance à deux nouveaux jets qui, si par exemple les veines confluentes G et G′ sont égales et concourantes, auront pour axe commun la bissectrice des axes de G et G′. Tel est le problème qu'étudie ici M. Cisotti, G et G′ étant quelconques, en admettant le mouvement plan et le régime permanent réalisé.

Il en obtient la solution complète en utilisant une variable auxiliaire ζ telle que le champ du mouvement corresponde, dans le plan complexe ζ au cercle de rayon 1. Il constate alors que

$$\zeta = w = u - iv,$$

u et v étant les composantes de la vitesse; l'intégrale générale du mouvement est

$$x+iy=z=\frac{1}{\pi}\left\{q\log(1-w)+\frac{q'}{j'}\log\left(1-\frac{w}{j'}\right)-\frac{q_1}{j_1}\log\left(1-\frac{w}{j_1}\right)-\frac{q'_1}{j'_1}\log\left(1-\frac{w}{j'_1}\right)\right\}.$$

Les constantes q et j, dont dépendent respectivement les débits des jets et leurs directions, sont liées par trois relations, de sorte qu'il reste une arbitraire.

L'auteur étudie aussi le cas de n jets confluents, avec un seul point à vitesse nulle (spartiacque); il importe de signaler ici les modifications apportées aux formules relatives à ce cas par M. Boggio (*Atti di Torino*, 1915).

JOSEPH PÉRÈS.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO.

Tome L, 1914-1915 (1).

D'Ovidio (*E.*). — [V 9] Placido Tardy; Notice nécrologique (4-6).

Avec la liste des publications.

Cherubino (*S.*). — [M_1 4 *d*] Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali di 2ª specie in sè [Sur les courbes hyperelliptiques admettant des transformations birationnelles de seconde espèce en elles-mêmes] (39-55).

Une transformation de seconde espèce, pour la courbe $f(w, z) = 0$, est

$$z' = \varphi_1(\overline{w}, \overline{z}), \qquad w' = \varphi_2(\overline{w}, \overline{z}),$$

$\overline{w}$, $\overline{z}$ étant les conjuguées de w, z.

Ce travail vient compléter celui que l'auteur a publié dans le Tome XLIX de ces *Atti*, p. 705. Il trouve tous les groupes de seconde espèce de substitutions linéaires.

Scribanti (*A.*). — [T 2 *b*] Le azioni taglianti e flettenti nelle nave sull'onda [Les actions de tranche et de flexion dans le navire sur l'onde] (56-80).

Sannia (*G.*). — [D 2] Sul metodo di sommazione di Cesàro [Sur la méthode de sommation de Cesàro (133-148).

Voir, comme première origine de ces considérations sur les séries indéter-

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2ᵉ série, t. XXXIX, 1915, 2ᵉ Partie, p. 71.

minées, la Note de Cesàro : *Sur la multiplication des séries* (Ce *Bulletin*, t. XIV, 1890, p. 114; puis : Chapman (*Proceedings of the London Math. Soc.*, 2e série, t. IX) et Bromwich (*An Introduction to the theory of infinite series* London, 1908) qui ont donné des extensions de la théorie. L'auteur ajoute des résultats nouveaux.

Toscano (*S.-A.*). — [M, 8] Sopra un inviluppo di circonferenze [Sur une enveloppe de circonférences] (149-163).

Vacca (*G.*). — [X 2] Il primo logaritmo neperiano calcolato prima di Nepero [Le premier logarithme népérien calculé avant Napier] (289-292).

Se rapporte à une observation de Luca Paciolo dans la *Summa de Arithmetica Geometria, etc.* (Venise, 1494).

Fubini (*G.*). — [D 1] Esiste un corpo pesante a densità sempre nulla? [Existe-t-il un corps pesant à densité toujours nulle?] (293-296).

Soit τ l'aire d'une portion quelconque d'une surface plane, et $f(\tau)$ une fonction de cette aire. Une telle fonction s'appelle *additive* si, étant $\tau = \tau_1 + \tau_2$, on a $f(\tau) = f(\tau_1) + f(\tau_2)$.

On définit aisément la dérivée de $f(\tau)$ *en un point* (x, y) du champ considéré. Cela posé, la question contenue dans le titre est équivalente à celle-ci (pour le cas des surfaces) :

De l'hypothèse $f'(x, y) = 0$, en tout point du champ, s'ensuit-il que $f(\tau) = 0$?

L'auteur trouve une classe de fonctions additives pour lesquelles on peut démontrer le théorème de la moyenne et celui de Rolle.

Voir une autre Note de l'auteur dans les *Rendiconti dei Lincei*, Vol. XXIX, 1915, 1er semestre, p. 69, et une de M. Vitali dans ces *Atti*, t. LI, 1915-16, p. 118.

Perucca (*E.*). — [T 3 *c*] Sull'azione magnetica della luce [Sur l'action magnétique de la lumière] (336-353).

Albenga (*G.*). — [T 2 *b*] Sul teorema di reciprocità di Land [Sur le théorème de réciprocité de Land] (419-422).

Bonferroni (*C.*). — [L_2 18, 19] Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare [Sur les systèmes linéaires de quadriques dont la Jacobienne a une dimension irrégulière] (423-438).

Comnessatti (*A.*). — Sulle trasformazioni hermitiane delle varietà di Jacobi [Sur les transformations hermitiennes des variétés de Jacobi] (439-455).

Toute transformation hermitienne d'une surface de Jacobi correspond à une transformation en elle-même de la courbe C, de genre 2, associée à la surface. L'auteur étend cette propriété aux variétés de Jacobi V_p, dont les points correspondent birationnellement aux séries g_p d'une courbe de genre p. Il donne aussi une démonstration du théorème de M. Torelli sur l'identité (à moins d'une transformation birationnelle) de deux courbes possédant deux systèmes d'intégrales normales de première espèce avec les mêmes périodes normales.

M. Severi ajoute à cette Note des observations en démontrant que : ayant donné la variété de Jacobi relative à une courbe ne possédant pas de correspondances symétriques régulières, la courbe est déterminée à moins de transformations birationnelles.

Jadanza (*N.*). — [V 19] Giuseppe Lorenzoni. Commémoration (461-478).

Avec la liste des 107 travaux de l'astronome Lorenzoni.

Jadanza (*N.*). — [X 2] Sul calcolo numerico dei logaritmi neperiani di 2 e 5 [Sur le calcul numérique des logarithmes népériens de 2 et de 5] (478-480).

Peano (*G.*). — [C 2 *j*] Resto nella formula di quadratura Cavalieri-Simpson [Le reste dans la formule de quadrature de Cavalieri-Simpson] (481-486).

Laura (*E.*). — [S 2 *e*] Sopra il problema della propagazione di moto all'esterno di una sfera in un mezzo elastico isotropo indefinito [Sur le problème de la propagation du mouvement à l'extérieur d'une sphère dans un milieu élastique isotrope indéfini] (487-514); Note 2e (749-778).

Colonnetti (*G.*). — [T 2 *a*] Sul secondo principio di reciprocità [Sur le second principe de réciprocité] (622-625).

Ricci (*C.-L.*). — [T 2 *a*ε] Le deformazioni delle molle ad elica [Les déformations des ressorts à hélice] (626-644).

Bottasso (*M.*). — [H 10 *d*] Sopra un nuovo problema dei valori

al contorno per un cerchio [Sur un nouveau problème des valeurs au contour pour un cercle] (645-668).

Déterminer $f(x, y)$ harmonique et régulière dans un cercle Γ ayant l'origine pour centre, et satisfaisant sur la circonférence à la condition

$$A x^2 \frac{\partial^2 f}{dx^2} + 2Bxy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + Cy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = F(x, y),$$

A, B, C étant des constantes données et F une fonction donnée.

Burali-Forti (*C.*). — [B 12] Nuove applicazioni degli operatori [Nouvelles applications des opérateurs] (669-684).

L'auteur définit comme classes d'opérateurs les formations géométriques (de Grassmann-Peano), les *vecteurs*, les *longueurs*, les *aires*, les *directions*, les *angles*.

Rosati (*C.*). — [M_1 4] Sugli integrali abeliani riducibili [Sur les intégrales abéliennes réductibles] (685-694).

Démonstration géométrique du théorème de Poincaré : Si sur une courbe de genre p il y a un système ∞^{q-1} $(q < p)$ d'intégrales réductibles avec $2p$ périodes réduites, il y en a un autre, indépendant du premier, ∞^{p-q-1} avec $2(p-q)$ périodes réduites.

Castellano (*F.*). — [B 12] I numeri complessi considerati come operatori sui vettori del piano [Les nombres complexes considérés comme opérateurs sur les vecteurs du plan] (727-736).

D'Ovidio (*E.*). — [V 9] Per Emanuele Fergola [Notice nécrologique sur E. Fergola] (801-802).

Bottasso (*M.*). — [H 10 *d*] Sull'equilibrio delle piastre elastiche piane appoggiate lungo il contorno [Sur l'équilibre des plaques élastiques planes appuyées au contour] (823-838).

Albenga (*G.*). — [R 7 *f*] Sul profilo teorico delle funicolari [Sur le profil théorique des chemins de fer funiculaires] (919-923).

Tanturri (*A.*). — [I 1] Prodotto di due numeri approssimati. Errore relativo o errore assoluto? [Produit de deux nombres approchés. Erreur relative ou erreur absolue?] (924-942).

Andreoli (*G.*). — [H 11 ref. T 2] Su un problema di meccanica ereditaria [Sur un problème de mécanique héréditaire] (1036-1052).

Problème des oscillations amoindries dans l'hypothèse qu'au lieu d'une résistance due à la vitesse, il y ait une résistance due à des forces héréditaires.

Fano (*G.*). — [M_2 8 ref. Q 2] Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tulli i generi nulli [Observations sur certaines variétés non rationnelles ayant tous les genres nuls] (1067-1072).

Jadanza (*E.*). — [V 9] Commemorazione d'Emanuele Fergola [Commémoration de E. Fergola] (1079-1094).

Avec portrait et liste des publications.

Boggio (*T.*). — [S 2 *d*] Sul problema delle vene confluenti [Sur le problème des veines confluentes] (1103-1119).

Peano (*G.*). — [12 *h*] Le grandezze coesistenti di Cauchy [Les grandeurs coexistantes de Cauchy] (1146-1155).

Les grandeurs *coexistantes* de Cauchy ne sont autre chose que les fonctions distributives d'un même champ.

S. Rindt.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

6e série, Tome VII, 1911 (1).

Duhem (*P.*). — Sur les petites oscillations d'un corps flottant (1-85).

Le problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants a été abordé par Lagrange et Lejeune-Dirichlet en recherchant les circonstances où le potentiel du système est minimum, et ce point de vue a été adopté dans la suite par Bravais et M. Guyon.

Un autre procédé, celui des petits mouvements, consiste à supposer que le

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XLIV, 1920, 2e Partie, p. 73.

flotteur et le liquide sont animés d'un petit mouvement pendulaire et à exprimer que la période de ce mouvement est nécessairement réelle.

C'est le point de vue auquel se place Clebsch, en signalant une supposition tout à fait inexacte faite par Poisson et Duhamel ; cela le conduit à des équations très compliquées et à une condition qui ne concorde pas avec celles qu'on déduit de la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, et l'amène à conclure que cette dernière, appelée règle du métacentre, est inexacte.

Le grand physicien français Duhem, reprenant toute cette belle théorie, montre que les objections de principe que Clebsch a élevées contre la théorie des oscillations des corps flottants de Poisson et Duhamel sont justifiées (on ne peut admettre que les forces d'inertie appliquées aux divers éléments du fluide en vertu du mouvement de ce dernier sont négligeables), mais que les conséquences auxquelles elle conduit ne sont pas toutes à rejeter et que les conditions de stabilité formulées sont exactes.

Appell (*P.*). — Sur le mouvement d'une bille de billard avec frottement (85-97).

Le problème n'offre pas de difficultés de principe particulières, mais l'examen des circonstances en jeu demandait une perspicacité toute spéciale.

Il est de ceux, si peu nombreux, que la mécanique classique permet d'étudier à fond, en même temps que l'expérience fait prévoir les résultats de l'analyse.

Study (*E.*). — Sur les équations du mouvement d'un corps solide (97-112).

L'auteur définit la position d'un solide par un système de huit coordonnées homogènes que lie une relation quadratique. Il introduit ainsi des paramètres (α, β) qui, mieux que les formules classiques, mettent en lumière les rapports de la mécanique du corps solide dans l'espace euclidien avec les propositions correspondantes de la mécanique non euclidienne.

Séguier (*J. de*). — Sur la représentation linéaire homogène des groupes symétrique et alterné (113-122).

Cette Note complète et met au point un Mémoire paru antérieurement dans le même recueil (1910) [1].

Gau (*E.*). — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode de M. Darboux (123-240).

La méthode par laquelle M. Darboux intègre ces équations repose sur le principe suivant. Si

$$U(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}, \qquad V(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLIII, 1919, 2e Partie, p. 30.

sont deux combinaisons intégrables distinctes de l'un des systèmes de caractéristiques de l'équation proposée, c'est-à-dire si U, V sont deux invariants distincts pour ce système de caractéristiques, l'équation $U = f(V)$, où f est une fonction arbitraire, admet avec la proposée une intégrale commune dépendant d'une fonction arbitraire. La méthode consiste essentiellement à chercher des invariants pour les caractéristiques d'ordres croissants $1, 2, \ldots, n, \ldots$; malheureusement, elle conduit, en général, à une infinité d'opérations.

M. Gau donne tout d'abord un nouveau moyen de former des invariants, pour les équations du second ordre ; il étudie ensuite les équations du type

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

puis celles-ci :

$$s = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q + c(x, y, z),$$
$$s = a(x, y, z)pq.$$

Des applications particulières rehaussent l'exposé de l'auteur.

Annycke (*Th.*). — Contribution à l'étude thermomécanique des tiges et des plaques (242-317).

Ce travail est une généralisation de problèmes étudiés depuis longtemps dans leurs grandes lignes et, plus tard, par M. Boussinesq ; c'est aussi le prolongement d'un Mémoire de M. Roy.

L'étude de l'élasticité à température constante, l'étude de la propagation de la chaleur dans un milieu soumis à des déformations ont fait dès le début du XIXe siècle l'objet de travaux restés classiques.

L'auteur traite des tiges de contexture symétrique par rapport aux sections normales, mais hétérogènes par ailleurs, puis des plaques élastiques planes hétérogènes admettant à toutes températures un état naturel des tronçons.

Des applications à quelques cas simples sont données.

Boussinesq (*J.*). — Contribution à l'optique cristalline (317-349).

M. Boussinesq donne d'abord une construction nouvelle de la direction des vibrations, de celle du rayon lumineux et de la vitesse de ce rayon, pour chacun des deux systèmes d'ondes planes de direction donnée, propagés dans un cristal transparent.

Il étudie ensuite les équations fondamentales relatives à l'absorption par un cristal translucide, c'est-à-dire un cristal se comportant sensiblement comme un milieu transparent dans des étendues de dimensions comparables aux longueurs d'ondulation, mais qui, cependant, après des parcours de quelques milliers d'ondes, aura produit une assez notable réduction de l'amplitude des mouvements.

Des réflexions sur la grandeur relative des longueurs d'onde que supposent les équations des mouvements de l'éther terminent ce Mémoire, qui est une suite aux principes exposés dans le Cours de physique mathématique de l'auteur.

Nous pouvons annoncer que le troisième volume de ce beau Traité paraîtra sous peu et que de nombreuses théories, ébauchées plus ou moins jusqu'ici, y sont mises au point.

Kœnigs (*G.*). — Sur les mouvements de Ribaucour décomposables (349-352).

Note concise sur une propriété des surfaces quadriques déformées dans le cas où un système binaire à deux paramètres, c'est-à-dire un système de deux corps liés dans leurs positions relatives par quatre relations, est décomposable.

Villat (*H.*). — Sur le mouvement d'un solide donné dans un fluide limité par une paroi fixe (353-409).

L'auteur a rencontré dans une précédente étude une fonction Ω_0^1 de forme assez compliquée qu'il étudie par divers procédés algébriques et qu'il ramène à la forme plus simple

$$\Omega_0^1 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\xi - \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\xi + \frac{\omega}{\pi}\sigma_0\right)} + \frac{4\alpha\eta\omega\sigma_0}{\pi^3}\log\xi + \frac{2\alpha\sigma_0}{\pi}.$$

Il en conclut que la fonction Ω est continue et que cette fonction est l'intégrale générale du problème du mouvement d'un solide dans un fluide limité par une paroi fixe.

Ces théories ne restent pas dans le vague des généralités dont on abuse trop souvent : elles sont susceptibles d'applications précises.

Jordan (*C.*). — Sur le nombre des solutions de la congruence $|a_{ik}| \equiv \mathrm{A} \bmod \mathrm{M}$ (409-417).

Soient A, M deux entiers quelconques; soit $|a_{ik}|$ un déterminant à n colonnes, dont les n^2 éléments a_{ik} soient des entiers mod M.

Le problème posé est de calculer le nombre $\mathfrak{N}(n, \mathrm{A}, \mathrm{M})$ des solutions de la congruence

$$|a_{ik}| \doteq \mathrm{A} \bmod \mathrm{M},$$

et on le ramène aisément au cas où $\mathfrak{N}(n, \mathrm{A}, \mathrm{M})$ est une puissance d'un nombre premier, et ensuite au calcul d'expressions semblables, mais plus simples.

R. de Montessus de Ballore.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XLIV; 1920. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, T. XXIX, 1912 (17-20); T. XXX, 1913 (20-25); T. XXXI, 1914 (34-38); T. XXXII, 1915 (57-59).

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa (Scienze fisiche e matematiche). Vol. IX, 1904 (63-69); Vol. X, 1908 (69-72).

Annali di matematica pura ed applicata. Série III, T. XXI, 1913 (25-29); T. XXII, 1914 (59-63); T. XXIII, 1914 (75-79).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. L, 1914-1915 (79-83).

Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels. T. 167, 2e semestre 1918 (5-16); T. 168, 1er semestre 1919 (39-56).

Journal de Mathématiques pures et appliquées. 6e série, T. V, 1909 (30-34); T. VI, 1910 (73-75); T. VII, 1911 (83-86).

4
4

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Adhémar (R. d'). 32.
Albenga (G.). 80, 82.
Alezais (R.). 18.
Andrade (J.). 5.
Andreoli (G.). 83.
Angelesco (A.). 12, 42.
Annycke (Th.). 85.
Appell (P.). 8, 9, 10, 84.
Bachelier (L.). 21.
Bäcklund (A.-V.). 77.
Belot (E.). 52.
Bernstein (S.). 19.
Bianchi (L.). 62, 77.
Bloch (L.). 55.
Boggio (T.). 83.
Bompiani (E.). 49.
Bonferroni (C.). 80.
Borel (E.). 28, 53.
Bortolotti (E.). 29.
Bottasso (M.). 81, 82.
Bounitzky (E.). 30.
Bourget (H.). 39.
Boussinesq (J.). 6, 7 (3), 11, 20, 34, 57, 58, 85.
Boutroux (P.). 23, 35, 54, 56, 73.
Brillouin (M.). 56.
Brouwer (L.-E.-J.). 48, 50, 53.
Brun (V.). 46.
Brussotti (L.). 61.
Buhl (A.). 14. 45.
Burali-Forti (C.). 82.
Caratheodory (C.). 27.
Carleman. 50.
Cartan (E.). 8, 10 (2), 12. 37.
Carvallo (E.). 13.
Castellano (F.). 82.
Chazy (J.). 39.
Cherubino (S.). 79.
Cipolla (I.). 69.
Cisotti (U.). 78.
Clairin (J.). 22.
Colonnetti (G.). 81.
Comessati (A.). 78.
Commessatti (A.). 81
Cotton (E.). 24, 46.
Cramér (H.). 45, 54.
Defourneaux. 50.
Delassus (Ét.). 18, 24.
Del Re (A.). 60.
Denjoy (A.). 9, 43, 50, 73.
Dienes (P.). 33.
Drach (J.). 13, 14, 39, 41, 43, 44.
Duhem (P.). 83.
Duport (H.). 39, 74.
Egnell (A.). 55.
Eisenhart (L.-P.). 62.
Enriques (F.). 63.
Fano (G.). 83.
Fatou (P.). 16, 44.
Faure (E.). 43.
Forsyth (A.-R.). 26.
Fubini (G.). 63, 66, 80.
Gambier (B.). 45, 48.
Garnier (R.). 13, 17. 40, 44.
Gau (E.). 13, 84.
Giraud (G.). 12, 59.
Godeaux (L.). 37.
Goormaghtigh (R.). 14.
Goursat (E.). 11.
Grassi (U.). 67.
Guichard (C.). 16, 39, 41, 52, 54.
Guillaumin (G.). 47, 49, 50, 51, 56.
Guldberg (A.). 41, 49.
Haag (J.). 24, 75.

Hadamard (J.). 28, 45.
Hahn (H.). 25.
Hamy (M.). 15.
Hostinsky (B.). 32.
Humbert (G.). 6. (2), 51, 52, 54.
Humbert (P.). 5, 10, 11, 14.
Jadanza (E.). 83.
Jadanza (N.). 81, (2).
Jamet (V.). 38.
Jordan (C.). 86.
Julia (G.). 16, 40, 44, 47, 48, 49, 51, 52, 53.
Kampé de Fériet (J.). 11.
Kœbe (P.). 25.
Kœnigs (G.). 86.
Kogbetliantz. 13, 52, 54.
Kryloff (N.). 48.
Lalesco (T.). 13.
Lamb (H.). 28.
Lambert (A.). 15.
Laura (E.). 81.
Lauricella (G.). 29.
Lecornu (L.). 44, 51.
Lefschetz (S.). 47, 49.
Le Roux (J.). 22.
Lery (G.). 57.
Levi (E.-E.). 27, 70.
Lévy (P.) 40, 49.
Maggi (G.-A.). 61.
Maillet (E.). 31, 42 (2).
Medici (S.). 70.
Mesnager. 15, 41, 43.
Montel (P.). 19, 41.
Montessus de Ballore (R. de). 8.
Nielsen (N.). 22, 35, 60, 62.
Nörlund (N.-E.). 36.
Ovidio (E. d'). 79, 82.
Peano (G.). 81, 83.
Perucca (E.). 80.
Petot (A.). 47.
Petrini (H.). 31.
Petrovitch (M.). 14, 38, 46.
Picard (E.). 9, 22, 24 (2), 59.
Picone (M.). 59, 71.
Pincherle (S.). 26.
Plancherel (M.). 8, 36.
Potron (M.). 21.
Rados (G.). 23.
Rateau (A.). 43, 44, 46, 53, 55, 56.
Rémoundos (G.-J.). 23, 55, 75.
Ricci (C.-L.). 81.
Riesz (F.). 34.
Rimini (C.). 67.
Riquier. 12, 20, 40.
Risser. 43.
Rosati (C.). 82.
Roy (L.). 19, 58, 74.
Sannia (G.). 79.
Scarpis (U.). 76.
Schur (F.). 27.
Scorza (G.). 10.
Scribanti (A.). 79.
Séguier (J.-A. de). 30, 84.
Séguier (M. de). 75.
Somigliana (G.). 35.
Sparre (M. de). 6, 47.
Stekloff. 26.
Stéphanos (C.). 28.
Straneo (P.). 9.
Study (E.). 84.
Tanturri (A.). 82.
Tonelli (L.). 77.
Toscano (S.-A.). 80.
Vacca (G.). 80.
Vâlcovici (V.). 76.
Valiron. 15.
Vergne (H.). 17.
Vessiot (E.). 6, 16, 17, 57.
Villat (H.). 17, 38, 58, 86.
Vitali (G.). 69.
Wilczynski (E.-J.). 25.
Wilensky (M.). 61.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

Gau (E.). 16, 56.
Giraud (G.). 25, 38, 59.
Montessus de Ballore (R. de). 34, 75, 86.
Pérès (Joseph). 29, 63, 79.
Rindi (S.). 72, 83.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLIV.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55
61478-20

QA
1
B8
v. 55
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY